Elementy logiki matematycznej

Jeśli potraktujemy matematykę jako język – sztuczny, lecz wciąż posiadający alfabet (symbole matematyczne) oraz zdania (twierdzenia) – to logikę należy uznać za jego gramatykę, czyli zbór reguł nim rządzących. Samo słowo *logika* wywodzi się z greckiego *logos* (gr. $\lambda \acute{o} \gamma o \sigma$), które ma wiele znaczeń, m.in. „uzasadnienie", „przyczyna", „wypowiedź" oraz „słowo."

Więcej znaczeń słowa logos można znaleźć w *Perseus Digital Library* na stronie: `http://www.perseus.tufts.edu`

Niniejszy rozdział poświęcimy podstawom logiki matematycznej. Rozpoczniemy od rachunku zdań, a następnie przejdziemy do rachunku predykatów. Warto jednak zaznaczyć, że nasze podejście nie będzie w pełni ściśle – w wielu miejscach zastosujemy uproszczenia.

1.1 Rachunek zdań – wprowadzenie

Jak sama nazwa wskazuje, rachunek zdań zajmuje się badaniem zdań oraz relacji między nimi. Nie będziemy analizować wszelkich możliwych wypowiedzeń, lecz skupimy się wyłącznie na tzw. *zdaniach w sensie logicznym* (zwanych również *zdaniami logicznymi*), czyli takich zdaniach w sensie gramatycznym, które są oznajmujące i można im przypisać wartość prawdziwościową: prawdę bądź fałsz. Przykładowo, zdaniami logicznymi są: *Chopin skomponował walca a-moll* oraz *Rok 2021 jest rokiem przestępnym*; pierwsze jest prawdziwe, a drugie fałszywe. Natomiast zdanie *Czy dobrze się pani czuje?* nie jest zdaniem w sensie logicznym, ponieważ nie jest oznajmujące. Podobnie, wypowiedzenie *Jaka praca, taka płaca* nie może być uznane za zdanie logiczne, gdyż składa się z dwóch równoważników zdań (brak w nich orzeczenia).

Zdaniem w sensie gramatycznym nazywamy wypowiedzenie zawierające orzeczenie. Do głównych typów orzeczeń należą: *orzeczenie czasownikowe*, wyrażone osobową formą czasownika, oraz *orzeczenie imienne*, składające się z tzw. *łącznika* (odmieniony czasownik *być*, *stawać się*, *zostać*) oraz *orzecznika*, którym jest inna część mowy, np. rzeczownik lub przymiotnik.

W niektórych przypadkach określenie prawdziwości zdania może być problematyczne. Przykładowo, do dziś nie wiadomo, czy zdanie *Wszystkie nietrywialne zera funkcji dzeta Riemanna leżą na prostej* $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ (znane jako hipoteza Riemanna) jest prawdziwe. Z drugiej strony, jak zauważają R. Murawski i K. Świrydowicz w swojej książce [9] istnieją zdania *oznajmujące* [...] *niedostatecznie sprecyzowane, o których przez to nie można orzec, czy są prawdziwe, czy fałszywe*. (Przykładem takiego zdania jest stwierdzenie *Prawdziwe piękno polega na jedności w wielości*.) Takie wypowiedzenia również nie należą do zbioru zdań logicznych, dlatego

[9] R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2006.

nie będziemy się nimi zajmować.

Zdania proste (czyli zawierające dokładnie jedno orzeczenie) będziemy oznaczać symbolami: $p, q, r, \ldots$. Prawdę oznaczymy symbolem 1, a fałsz symbolem 0.

W literaturze anglojęzycznej prawdę oznacza się zazwyczaj symbolem T (od *true*), a fałsz symbolem F (od *false*).

1.2 Spójniki logiczne

W językach naturalnych, takich jak język polski, zdania złożone można tworzyć poprzez łączenie prostszych wypowiedzi za pomocą spójników. Do najważniejszych *spójników logicznych* należą:

- *negacja* $\neg$ (zdanie $\neg p$ czytamy *Nieprawda, że* p)
- *koniunkcja* $\wedge$ (zdanie $p \wedge q$ czytamy p *i* q)
- *alternatywa* $\vee$ (zdanie $p \vee q$ czytamy p *lub* q)
- *implikacja* $\rightarrow$ (zdanie $p \rightarrow q$ czytamy *Jeżeli* p, *to* q)
- *równoważność* $\leftrightarrow$ (zdanie $p \leftrightarrow q$ czytamy p *wtedy i tylko wtedy, gdy* q)

Krótki przegląd alternatywnej symboliki logicznej znajduje się na stronie 11 książki [9] R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2006.

W starszych opracowaniach (zob. np. [7]) koniunkcja i alternatywa zdań p, q były określane odpowiednio jako *iloczyn* i *suma logiczna* zdań. W związku z tym w przypadku koniunkcji zdania p, q nazywamy *czynnikami*, a w przypadku alternatywy – *składnikami*. W przypadku implikacji $p \rightarrow q$, zdanie p nazywamy *poprzednikiem*, a zdanie q *następnikiem*.

[7] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, wydanie 9, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2004.

Przejdziemy teraz do omówienia definicji *formuły języka rachunku zdań*. Jak wspomnieliśmy na początku rozdziału będziemy starali się unikać (gdzie to możliwe) przedstawiania formalnych definicji pojęć logicznych. Na potrzeby tego opracowania przyjmiemy więc, że wszystkie zmienne zdaniowe $p, q, r, \ldots$, a także wszystkie „sensowne" wyrażenia, które możemy zapisać przy użyciu zmiennych zdaniowych, spójników logicznych i nawiasów, są formułami języka rachunku zdań. Przykładowo wyrażenia postaci $p, \neg p, p \rightarrow q$ oraz $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$ są formułami rachunku zdań. Natomiast wyrażenia $((p$ oraz $p \wedge \vee q$ takimi formułami nie są; w pierwszym przypadku brakuje nawiasów zamykających $))$, w drugim – błędnie użyto (dwuargumentowych) spójników logicznych, ponieważ te muszą łączyć zdania.

Gdybyśmy chcieli sformułować definicję *formuły* w sposób formalny, to brzmiałaby ona następująco: (1) każda zmienna zdaniowa jest formułą języka rachunku zdań; (2) jeżeli φ oraz ψ są formułami języka rachunku zdań, to napisy $\neg(\varphi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$ oraz $(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$ są również formułami języka rachunku zdań; (3) nie ma innych formuł języka rachunku zdań poza zmiennymi zdaniowymi i takimi formułami, które powstają dzięki zastosowaniu reguły (2); por. Definicja 1.2.2 w [9] R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2006.

Aby uprościć zapis, przyjmujemy, że spójnik negacji łączy zmienne zdaniowe mocniej niż inne spójniki logiczne. Oznacz to, że zapis $p \rightarrow \neg q$ należy rozumieć jako $p \rightarrow (\neg q)$. W dalszym ciągu, o ile nie będzie to prowadzić do jakiś niejednoznaczności, będziemy zawsze pomijać zbędne nawiasy „wokół" negacji.

Zauważmy ponadto, że różne zdania języka naturalnego mogą być zapisane przy użyciu tej samej formuły języka rachunku zdań; i tak zdania *Jeżeli pada deszcz, to na niebie są chmury i nie świeci słońce* oraz *O ile dobrze rozumiem zapiski Adama, w zeszłym roku odwiedził on Kraków, ale* *nigdy nie był w Warszawie* są oparte na schemacie $p \to (q \wedge \neg r)$. Dzieje się tak, ponieważ w rachunku zdań nie interesuje nas znaczenie poszczególnych zdań (semantyka), a jedynie ich struktura (syntaktyka) oraz prawdziwość lub fałszywość zdań składowych.

Zanim przejdziemy dalej, rozważmy dwa przykłady, które pomogą nam utrwalić dotychczasową wiedzę.

Przykład 1.2.1. Zdanie *Adam ma pięć lat i chodzi do przedszkola* jest oczywiście zdaniem w sensie logicznym (dlaczego?). Z gramatycznego (i logicznego) punktu widzenia składa się ono z dwóch zdań prostych: $p =$ *Adam ma pięć lat* oraz $q =$ [*Adam*] *chodzi do przedszkola*. Oba zdania proste połączone są spójnikiem koniunkcji *i*, a zatem zdanie *Adam ma pięć lat i chodzi do przedszkola* oparte jest na schemacie $p \wedge q$.

Zdanie *Chodzi do przedszkola* zawiera podmiot domyślny *on*, o czym świadczy forma gramatyczna orzeczenia *chodzi*. Z pierwszego zdania wynika, że mowa tutaj o Adamie.

Na tym samym schemacie opiera się także zdanie *Dziś jest poniedziałek i mamy zajęcia z matematyki*.

Z drugiej strony zdanie *Jola i jej mama jedzą pyszne truskawkowe lody*, choć zawiera spójnik *i*, nie jest oparte na schemacie $p \wedge q$. Jest ono bowiem zdaniem pojedynczym o orzeczeniu *jedzą* i tzw. podmiocie szeregowym *Jola i jej mama*; spójnik *i* nie jest tutaj spójnikiem zdaniotwórczym, lecz pełni rolę łącznika między członami podmiotu. Zdanie *Jola i jej mama jedzą pyszne truskawkowe lody* oparte jest więc na schemacie zdania prostego r.

Użyliśmy litery r, aby nie myliła się z rozważanymi wcześniej literami p, q.

Przykład 1.2.2. A teraz spróbujmy napisać schemat logiczny dla zdania wielokrotnie złożonego:

Jeżeli najbliższe wybory parlamentarne wygra lewica, to znowu wzrosną podatki i spadnie tempo rozwoju gospodarczego Polski, a jeżeli wygra prawica, to powstanie bardzo słaby rząd i albo będziemy przez cztery lata świadkami gorszących skandali albo za rok będą nowe wybory.

Zdanie to znalazłem w notatkach ze *Wstępu do matematyki*, które wiele lat temu użyczył mi mój kolega Marek Kaluba (obecnie dr Marek Kaluba), gdy pierwszy raz miałem prowadzić ten przedmiot. Skąd je wziął? Może sam wymyślił? Nie wiem.

Pierwszym pytaniem jakie należy zadać jest, czy powyższe zdanie jest w ogóle zdaniem w sensie logicznym. Oczywiście jest ono zdaniem oznajmującym. Pewną wątpliwość może jednak budzić czas, w którym jest sformułowane, tj. czas przyszły, i fakt czy w związku z tym można mu przypisać atrybut prawdziwości/fałszywości. Gdybyśmy byli superistotą, która żyje poza czasem, lub posiadali wiedzę dotyczącą historii całej ludzkości, to stwierdzenie, czy w najbliższych wyborach wygra prawica czy lewica, nie byłoby dla nas żadnym problemem; przecież jakaś partia polityczna wygra i zawsze możemy ją przypisać do jednego z dwóch bloków (zakładamy sztucznie, że są dwa). Podobnie, można jednoznacznie ocenić wzrost lub spadek tempa rozwoju gospodarczego, jest on bowiem opisywany liczbą wymierną; mówi się przecież *PKB wzrosło rok do roku o* 3,4%. W możliwości przypisania prawdy lub fałszu do zdania nie chodzi o to, byśmy tu i teraz znali stan faktyczny, ale byśmy mieli możliwość rozstrzygnąć, jak było, jest lub będzie. Dajmy na to, nikt z nas nie jest w stanie stwierdzić, czy zdanie *W Polsce na dzień*

W języku polskim czasowniki w aspekcie dokonanym (*wygrać*, *wzrosnąć*, *spaść*, …) nie posiadają formy czasu teraźniejszego.

31 marca 2022 mieszkało 38 475 351 *osób* jest prawdziwe czy fałszywe bez np. spojrzenia do spisu ludności lub bazy PESEL. Jednak sam fakt, że (teoretycznie) możemy to zrobić, powoduje, że ma ono pewną konkretną wartość logiczną (choć obecnie jej nie znamy).

Wiemy już zatem, że rozważane przez nas zdanie, jest zdaniem w sensie logicznym. Opiszmy teraz zdania proste, z których jest zbudowane:

$$\begin{aligned} p &= \textit{Najbliższe wybory parlamentarne wygra lewica}, \\ q &= \textit{Znowu wzrosną podatki}, \\ r &= \textit{Spadnie tempo rozwoju gospodarczego Polski}, \\ s &= [\textit{Najbliższe wybory parlamentarne}]\ \textit{wygra prawica}, \\ t &= \textit{Powstanie bardzo słaby rząd}, \\ u &= \textit{Będziemy przez cztery lata świadkami gorszących skandali}, \\ w &= \textit{Za rok będą nowe wybory}. \end{aligned}$$

Zanim napiszemy schemat logiczny, na którym oparte jest nasze zdanie, uczynimy uwagę odnośnie spójników zdaniotwórczych w nim występujących. Spójnik *a* należy traktować jako koniunkcję, natomiast spójnik *albo* jako alternatywę. Warto tutaj wspomnieć, że spójnik *albo* jest najczęściej związany z tzw. *alternatywą wykluczającą* $\oplus$, w której prawdę otrzymujemy wtedy, gdy prawdziwe jest wyłącznie jedno z dwóch zdań składowych. W naszym przypadku możliwość rozpisania nowych wyborów parlamentarnych nie wyklucza tego, że politycy uwikłają się w skandale, i odwrotnie gorszące skandale nie wykluczają rozpisania nowych wyborów; w rzeczywistym świecie pewnie ten proces jeszcze przyśpieszają.

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Rozważane przez nas zdanie oparte jest zatem na schemacie

$$[p \to (q \wedge r)] \wedge \{s \to [t \wedge (u \vee w)]\}.$$

To dobre miejsce, by napisać kilka słów o wartościowaniu formuł. *Wartościowanie* jest funkcją, która przypisuje wartość 0 lub 1 formułom języka rachunku zdań w oparciu o wartości logiczne podstawowych spójników opisane następującą *tabelką prawdziwościową*:

Precyzyjną definicję wartościowania można znaleźć w [2] T. Batóg, *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2003.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0		0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0		0	0	1	1

Przykładowo, wartościowanie formuły zdaniowej $p \to (p \wedge q)$ jest funkcją dwóch zmiennych $v\colon \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \to \{0,1\}$, której wartości dane są wzorami:

$$v(0,0) = 1, \quad v(0,1) = 1, \quad v(1,0) = 0, \quad v(1,1) = 1,$$

przy czym przyjmujemy, że pierwsza zmienna odpowiada zmiennej zdaniowej p, a druga zmiennej zdaniowej q. W praktyce wartościowanie formuły $p \to (p \wedge q)$ zapisuje się za pomocą tabelki

p	q	$p \wedge q$	$p \to (p \wedge q)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Jak wartościowanie działa w praktyce, zobaczymy na poniższych przykładach. Będziemy w nich wykorzystywać tabelki prawdziwościowe dla spójników logicznych.

Przykład 1.2.3. Zbadamy wartość logiczną formuły

$$(p \vee q) \to [p \wedge (q \vee \neg p)],$$

gdy $p = 0$ oraz $q = 0$. Postępując zgodnie z „kolejnością wykonywania działań”, najpierw musimy obliczyć wartość logiczną formuły $\neg p$. W drugiej kolejności zajmujemy się formułą $q \vee \neg p$, następnie $p \vee q$ oraz $p \wedge (q \vee \neg p)$ i na końcu wartością całego wyrażenia. Zapisując kolejne kroki jako kolejne kolumny tabeli, otrzymujemy

p	q	$\neg p$	$q \vee \neg p$	$p \vee q$	$p \wedge (q \vee \neg p)$	$(p \vee q) \to [p \wedge (q \vee \neg p)]$
0	0	1	1	0	0	1

Przykład 1.2.4. Zbadajmy jeszcze wartość logiczną formuły

$$[(q \leftrightarrow p) \wedge r] \vee [(\neg q \to p) \wedge s],$$

gdy $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$ oraz $s = 0$. Zapisując kolejne kroki w postaci tabeli, otrzymujemy

p	q	r	s	$q \leftrightarrow p$	$(q \leftrightarrow p) \wedge r$	$\neg q$	$\neg q \to p$	$[(\neg q \to p) \wedge s]$	$[(q \leftrightarrow p) \wedge r] \vee [(\neg q \to p) \wedge s]$
1	0	1	0	0	0	1	1	0	0

1.3 *Tautologie języka rachunku zdań*

Tautologią języka rachunku zdań nazywamy taką formułę, której funkcja wartościowania zawsze przyjmuje wartość 1. Innymi słowy, formuła jest tautologią, jeżeli przy dowolnej interpretacji zmiennych zdaniowych zawsze jest ona prawdziwa.

Znaczenie tautologii w matematyce (ale także w innych dziedzinach nauki) wynika z faktu, że stanowią one podstawę tzw. *schematów rozumowań niezawodnych*, to jest takich rozumowań, które od prawdziwych

Więcej na temat rozumowań niezawodnych można znaleźć w [9] R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2006.

przesłanek zawsze prowadzą do prawdziwych wniosków.

Do przykładowych tautologii należą:

- prawo tożsamości: $p \to p$
- prawdo wyłączonego środka: $p \vee \neg p$
- prawdo podwójnej negacji: $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$
- prawo Claviusa: $(p \to \neg p) \to \neg p$
- prawa de Morgana: $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
  $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- prawa Dunsa Scotusa: $(p \wedge \neg p) \to q$
  $p \to (\neg p \to q)$
- prawo transpozycji: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Przykład 1.3.1. W ramach wprawy sprawdzimy teraz, że pierwsze z praw de Morgana jest tautologią języka rachunku zdań. Wykorzystamy w tym celu *metodę zero-jedynkową*, która polega na wyznaczeniu funkcji wartościowana i zapisana jej w postaci tabeli. Kolejne wiersze tabeli odpowiadają kolejnym wartościom logicznym, które mogą przyjąć zdania proste: $(p, q) = (0, 0)$, $(p, q) = (0, 1)$, $(p, q) = (1, 0)$ oraz $(p, q) = (1, 1)$. Kolumny tabeli odpowiadają kolejnym krokom, które należy podjąć, by obliczyć wartość logiczną formuły $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$. Mamy

Język rachunku zdań jest *rozstrzygalny*, tzn. mając daną formułę tego języka, posługując się np. metodą zero-jedynkową, zawsze jesteśmy w stanie w skończonej liczbie kroków stwierdzić, czy jest ona tautologią czy też nie.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Ponieważ niezależnie od wartości logicznych zdań prostych p i q formuła $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ jest zawsze prawdziwa, stwierdzamy, że jest ona tautologią języka rachunku zdań.

Przykład 1.3.2. Z drugiej strony formuła $\neg(p \vee q) \to [q \wedge (p \leftrightarrow q)]$ nie jest tautologią języka rachunku zdań, gdyż mamy

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$p \leftrightarrow q$	$q \wedge (p \leftrightarrow q)$	$\neg(p \vee q) \to [q \wedge (p \leftrightarrow q)]$
0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1

Innymi słowy dla $p = 0$ i $q = 0$ formuła $\neg(p \vee q) \to [q \wedge (p \leftrightarrow q)]$ przyjmuje wartość zero.

Gdybyśmy od początku znali wartościowanie, przy którym dana formuła jest fałszywa, to oczywiście nie musimy wyznaczać całej tabelki. Ale kto to może wiedzieć?

Na zakończenie tego paragrafu zobaczymy jak wygląda metoda zero-jedynkowa dla formuły składającej się z trzech zmiennych zdaniowych.

Przykład 1.3.3. Rozważmy formułę $p \to [(q \wedge \neg q) \to r]$ i stwórzmy dla niej tabelkę prawdziwościową

p	q	r	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$(q \wedge \neg q) \to r$	$p \to [(q \wedge \neg q) \to r]$
0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1

Ponieważ niezależnie od wartości logicznych zdań prostych p, q i r formuła $p \to [(q \wedge \neg q) \to r]$ jest zawsze prawdziwa, stwierdzamy, że jest ona tautologią języka rachunku zdań.

1.4 Rachunek predykatów

W matematyce (jak i innych naukach) niejednokrotnie obok zdań orzekających na temat jakiś faktów, pojawiają się również zdania mówiące o ilości, np. *Żadna liczba naturalna nie jest ujemna*, *Równanie* $x^2 + 5x + 6 = 0$ *ma dwa rozwiązania rzeczywiste* czy *Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba naturalna od niej większa*. Zdań takich nie można wyrazić w języku rachunku zdań, gdyż brakuje w nim tzw. *kwantyfikatorów*. Rozróżniamy dwa typy kwantyfikatorów:

- *kwantyfikator mały* $\exists$ (wyrażenie $\exists x$ czytamy „istnieje takie x, że ...”),
- *kwantyfikator duży* $\forall$ (wyrażenie $\forall x$ czytamy „dla każdego x ...”).

Kwantyfikator mały nazywa się również szczegółowym, a duży – ogólnym. W niektórych książkach kwantyfikatory takie są oznaczane symbolami odpowiednio $\bigvee$ oraz $\bigwedge$, a w starszych pozycjach symbolami odpowiednio $\sum$ oraz $\prod$.

Kwantyfikator mały $\exists x$ oraz duży $\forall x$ są *kwantyfikatorami o nieograniczonym zakresie*. Oznacza to, że występująca pod nimi zmienna x przebiega wszystkie możliwe obiekty; może być nie tylko liczbą, ale także figurą geometryczną (np. kwadratem), czy nawet fizycznym obiektem (np. stołem czy krzesłem).

Czasami (np. dla wygody czy uproszczenia zapisu) bierze się pod uwagę jedynie obiekty z ustalonego wcześniej zbioru (np. zbioru liczb naturalnych czy rzeczywistych). Stosuje się wtedy tzw. *kwantyfikatory o ograniczonym zakresie* i zamiast pisać *Dla każdego* x, *jeżeli tylko* x *jest liczbą naturalną, to jest on podzielny przez* 1, możemy pisać *Każda liczba naturalna* x *jest podzielna przez* 1. Podobnie zamiast pisać *Istnieje taki* x, *że jest on liczbą wymierną i jest mniejszy od* $\sqrt{2}$, możemy napisać *Istnieje taka* *liczba wymierna* x, *która jest mniejsza od* $\sqrt{2}$. Czasami (np. dla wygody czy uproszczenia zapisu) bierze się pod uwagę jedynie obiekty z ustalonego wcześniej zbioru (np. zbioru liczb naturalnych czy rzeczywistych). Stosuje się wtedy tzw. *kwantyfikatory o ograniczonym zakresie* i zamiast pisać *Dla każdego* x, *jeżeli tylko* x *jest liczbą naturalną, to jest on podzielny przez* 1, możemy pisać *Każda liczba naturalna* x *jest podzielna przez* 1. Podobnie, zamiast pisać *Istnieje taki* x, *że jest on liczbą wymierną i jest mniejszy od* $\sqrt{2}$, możemy napisać *Istnieje taka liczba wymierna* x, *która jest mniejsza od* $\sqrt{2}$.

Zobaczmy jak można byłoby powyższe zdania wyrazić za pomocą kwantyfikatorów. Niech $\varphi(x)$ oznacza wyrażenie x *jest liczbą naturalną*, a $\psi(x)$ wyrażenie x *jest podzielny przez* 1. Wtedy zdanie *Dla każdego* x, *jeżeli tylko* x *jest liczbą naturalną, to jest on podzielny przez* 1 przyjmuje postać

$$\forall x \ \ (\varphi(x) \to \psi(x)),$$

a zdanie *Każda liczba naturalna* x *jest podzielna przez* 1 postać

$$\forall \varphi(x) \ \ \psi(x).$$

W drugim przypadku, jeżeli przez $\varphi(x)$ oznaczmy wyrażenie x *jest liczbą wymierną*, a przez $\psi(x)$ wyrażenie x *jest mniejszy od* $\sqrt{2}$, to zdanie *Istnieje taki* x, *że jest on liczbą wymierną i jest mniejszy od* $\sqrt{2}$ przybiera postać

$$\exists x \ \ (\varphi(x) \wedge \psi(x)),$$

a zdanie *Istnieje taka liczba wymierna* x, *która jest mniejsza od* $\sqrt{2}$ postać

$$\exists \varphi(x) \ \ \psi(x).$$

Powyższe przykłady są ilustracją ogólnych wzorów, które pozwalają zamieniać kwantyfikatory o nieograniczonym zakresie na te o zakresie ograniczonym, i odwrotnie:

$$\left[\forall x \ \ (\varphi(x) \to \psi(x))\right] \leftrightarrow \left[\forall \varphi(x) \ \ \psi(x)\right],$$
$$\left[\exists x \ \ (\varphi(x) \wedge \psi(x))\right] \leftrightarrow \left[\exists \varphi(x) \ \ \psi(x)\right].$$

Zauważmy, że w przypadku kwantyfikatorów o nieograniczonym zakresie pod kwantyfikatorem stoi zmienna $x, y, \ldots$. W przypadku kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie pod kwantyfikatorem stoi wyrażenie $\varphi(x)$.

Choć kilkukrotnie używaliśmy już formuł języka rachunku predykatów, ani razu nie wspomnieliśmy jeszcze z czego właściwie język ten się składa, ni czym są formuły tego języka. I prawdę mówiąc nie będziemy tego precyzyjnie robić, ponieważ wymagałoby to wprowadzenia wielu definicji, które w dalszych rozdziałach nie będą nam potrzebne. Na nasze potrzeby przyjmiemy, że *formułą języka rachunku predykatów* będziemy nazywać wszystkie „sensowne” (czyli zgodne z zasadami składni) wyrażenia zbudowanie z:

Osoby zainteresowane pełnym wprowadzeniem do języka rachunku predykatów odsyłamy do książek [2] T. Batóg, *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2003. oraz [9] R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2006 albo innych książek z logiki matematycznej.

- *stałych* (*indywiduowych*) $a, b, c, \ldots$ oznaczających konkretne (niekonieczne fizyczne) obiekty (np. Jan Nowak, liczba wymierna, π, rozkład normalny, ...),
- *zmiennych* $x, y, z, \ldots$,
- *symboli funkcyjnych* $F, G, H, \ldots$ dzięki, którym ze stałych i zmiennych prostszych można budować zmienne i stałe bardziej skomplikowane (np. $F(x, y) = x + y$ lub $G(r) =$ „*koło o promieniu* r”, gdzie r jest konkretną liczbą),
- *predykatów* $P, Q, R, \ldots$, czyli wyrażeń, które w połączeniu ze stałymi tworzą zdania (np. predykat $P =$ „... *jest liczbą niewymierną*” w połączeniu ze stałą π tworzy zdanie $P(\pi) =$ „π *jest liczbą niewymierną*”); predykaty mogą łączyć się również ze zmiennymi (np. predykat $Q =$ „... leży pomiędzy ... oraz ...” w połączeniu ze zmiennymi x, y, z daje wyrażenie $Q(x, y, z) =$ „x *leży pomiędzy* y *oraz* z”),
- kwantyfikatorów,
- spójników logicznych,
- symboli pomocniczych takich, jak nawiasy, znaki przestankowe, itp.

Poznawszy składniki rachunku predykatów, poćwiczymy teraz zapisywanie zdań w tym języku.

Przykład 1.4.1. Naszym celem jest symboliczny zapis poniższych zdań wyrażonych w języku naturalnym.

(a) Każdy pies jest ssakiem.

(b) Nie wszyscy ludzie są ssakami.

(c) Tylko ludzie są ssakami.

(d) Każdy człowiek ma psa.

(e) Żaden człowiek nie posiada psa.

W pierwszej kolejności zdefiniujmy następujące predykaty

$$C = \ldots \text{ jest człowiekiem,}$$
$$P = \ldots \text{ jest psem,}$$
$$S = \ldots \text{ jest ssakiem,}$$
$$M = \ldots \text{ ma } \ldots;$$

predykaty C, P i S są jednoargumetnowe, a predykat M dwuargumentowy.

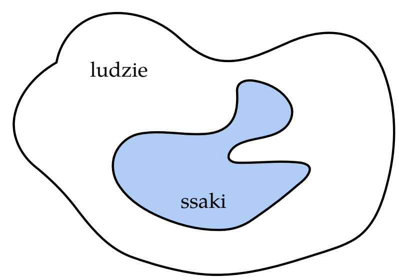
Ijon Tichy przebywając na planecie Entropia był uczestnikiem takiego oto dialogu:
“- Pan jest ssakiem, prawda?
- Tak.
- A więc pomyślnego ssania!”
Stanisław Lem, Dzienniki gwiazdowe

(a) Słowo *każdy* odpowiada oczywiście dużemu kwantyfikatorowi. Mamy zatem $\forall x\ (P(x) \rightarrow S(x))$ lub (korzystając z kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie) $\forall P(x)\ \ S(x)$. Zauważmy, że w przypadku korzystania z kwantyfikatorów o nieograniczonym zakresie musimy użyć implikacji, gdyż x przebiega wszystkie możliwe obiekty i zdanie $\forall x\ \ S(x)$ oznaczałoby, że np. stół też jest ssakiem, a nie taka przecież była nasza intencja. W tym miejscu należy podkreślić, że całkowicie abstrahujemy od tego, czy dane zdania są prawdziwe i odpowiadają rzeczywistości, czy też nie. W tym miejscu nie ma to dla nas żadnego znaczenia.

(b) Zdanie *Nie wszyscy ludzie są ssakami* możemy (bez zmiany znaczenia) wyrazić również jako *Nie każdy człowiek jest ssakiem*, a to już możemy zapisać symbolicznie jako $\neg\forall x\ \ (C(x) \rightarrow S(x))$ albo $\neg\forall C(x)\ \ S(x)$. Możemy również „wykonać negację” na poziomie języka polskiego i wtedy zdanie *Nie każdy człowiek jest ssakiem* przyjmie postać *Istnieje człowiek, który nie jest ssakiem*, a to z kolei prowadzi do następujących zapisów symbolicznych $\exists x\ \ (C(x) \wedge \neg S(x))$ oraz $\exists C(x)\ \ \neg S(x)$.

Podsumowując, zapisem w języku predykatów zdania *Nie wszyscy ludzie są ssakami* jest *każda* z czterech powyższych formuł.

(c) By poprawnie napisać schemat zdania *Tylko ludzie są ssakami* w języku predykatów, musimy dobrze zrozumieć jego treść. Stwierdza ono, że jedynymi ssakami są ludzie, a więc nic innego niż człowiek (ani *łosie, jelenie, sarny, dziki, lisy, borsuki, kuny, jenoty, wilki i rysie; z ptaków: kuropatwy, bażanty, dzikie kaczki, gęsi, łyski, bekasy i cietrzewie*) nie może być ssakiem. Ale wśród ludzi mogą być osoby, które ssakami nie są. A zatem zdanie *Tylko ludzie są ssakami* symbolicznie możemy zapisać tak $\forall x\ \ (S(x) \rightarrow C(x))$ lub tak $\forall S(x)\ \ C(x)$.



(d) W tym przykładzie najprościej (i najprzejrzyściej) skorzystać będzie z kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie. Zdanie *Każdy człowiek ma psa* zapisujemy symbolicznie jako $\forall C(x)\ \exists P(y)\ \ M(x, y)$.

(e) I tutaj skorzystamy z kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie. Zdanie *Żaden człowiek nie posiada psa* symbolicznie zapiszemy jako $\forall C(x)\ \forall P(y)\ \ \neg M(x, y)$.

Przykład 1.4.2. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Naszym zadaniem będzie zapisać następujące zdania dotyczące liczby n w języku rachunku predykatów.

W niniejszym skrypcie przyjmujemy, że najmniejszą liczbą naturalną jest 1, tzn. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. W niektórych książkach zakłada się, że liczby naturalne zaczynają się od 0; jest to tylko i włącznie kwestia gustu. A o gustach, jak wiadomo, się nie dyskutuje.

(a) n jest liczbą parzystą.

(b) n jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

(c) n jest liczbą pierwszą.

(d) n przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1.

W odróżnieniu od poprzedniego przykładu nie będziemy definiować żadnych dodatkowych predykatów ani symboli funkcyjnych, skorzystamy bowiem ze znanych wszystkim symboli matematycznych.

(a) Fakt, że n jest liczbą parzystą oznacza, że jest wielokrotnością 2, tzn. istnieje jakaś liczba naturalna k taka, że $n = 2k$. Zatem zdanie n *jest liczbą parzystą* możemy zapisać następująco $\exists k \in \mathbb{N} \;\; n = 2k$.

(b) Jeżeli ktoś zrozumiał rozwiązanie podpunktu (a), to i z tym nie powinien mieć problemu. Mamy $\exists k \in \mathbb{N} \; \exists l \in \mathbb{N} \;\; n = k^2 + l^2$.

(c) Przypomnijmy, że liczba pierwsza to liczba większa od 1, która posiada dokładnie dwa dzielniki: 1 i samą siebie. Innymi słowy, jeżeli liczbę pierwszą przedstawimy w postaci iloczynu $k \cdot l$ (a więc jako wielokrotność liczby k lub l), to jedna z nich musi być 1. Zatem zdanie n *jest liczbą pierwszą* zapisujemy jako

$$(n > 1) \wedge \big\{\forall k \in \mathbb{N} \; \forall l \in \mathbb{N} \;\; [n = k \cdot l \to (k = 1 \vee l = 1)]\big\}.$$

(d) Kluczem do rozwiązania tego przykładu jest zrozumienie jak wyglądają liczby, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1. Wypiszmy kilka pierwszych. Są to: $1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots$. Widzimy teraz, że liczby te możemy zapisać w postaci $4k - 3$ dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ lub w postaci $4k + 1$, gdy przyjmiemy, że $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Zatem zdanie n *przy dzieleniu przez 4 daje resztę 1* można zapisać w jednej z dwóch równoważnych postaci: $\exists k \in \mathbb{N} \;\; n = 4k - 3$ lub $\exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \;\; n = 4k + 1$.

W tym miejscu słowo *pierwszy* jest liczebnikiem porządkowym i oznacza *pierwszy z kolei*. Nie ma żadnego związku z pojęciem *liczby pierwszej* z poprzedniego przykładu.

W drugiej części niniejszego paragrafu chcemy się skupić już nie na „całych” formułach języka rachunku predykatów, ale na roli jaką pełnią w tych formułach zmienne. Zaczniemy od zdefiniowania pojęcia zasięgu kwantyfikatora.

Należy uważać, by nie mylić zasięgu kwantyfikatora z kwantyfikatorem o ograniczonym zakresie!

Definicja 1.4.3. Wyrażenie φ w formułach $\exists x \; (\varphi)$ i w $\forall x \; (\varphi)$ nazywamy *zasięgiem* odpowiedniego kwantyfikatora.

Innymi słowy zasięgiem kwantyfikatora jest to, co za nim występuje; oczywiście oprócz zmiennej, bo ta występuje *pod* kwantyfikatorem. Na przykład w formule $\forall x (P(x) \to Q(x))$ zasięgiem kwantyfikatora jest wyrażenie $(P(x) \to Q(x))$, a w formule $\forall x \; \exists y \;\; [P(x, y) \wedge (Q(x) \vee \neg R(x))]$ zasięgiem kwantyfikatora dużego jest $\exists y \;\; [P(x, y) \wedge (Q(x) \vee \neg R(x))]$, a małego $[P(x, y) \wedge (Q(x) \vee \neg R(x))]$.

Często, gdy nie będzie istniała możliwość błędnego zinterpretowania formuły języka predykatów, będziemy opuszczać nawiasy. Zresztą stosowaliśmy już to podejście wcześniej i pisaliśmy $\forall C(x) \;\; \exists P(y) \;\;\; M(x, y)$ zamiast $\forall C(x) \big[\exists P(y) \;\; (M(x, y))\big]$.

W przypadku bardziej skomplikowanych formuł języka predykatów wyznaczenie zasięgu kwantyfikatorów również nie powinno sprawiać żadnych trudności.

Przykład 1.4.4. Rozważmy następującą formułę

$$\big[\forall x \; \exists y \;\; (P(x, y) \to \neg Q(y))\big] \to \exists z \;\; (Q(z) \wedge R(x)).$$

Zasięgiem kwantyfikatora $\forall x$ jest $\exists y \ (P(x, y) \rightarrow \neg Q(y))$, a zasięgiem kwantyfikatora $\exists y$ jest $(P(x, y) \rightarrow \neg Q(y))$. W końcu zasięgiem kwantyfikatora $\exists z$ jest $(Q(z) \wedge R(x))$.

Formalnie powinniśmy mówić o zasięgu dużego kwantyfikatora $\forall$, a nie kwantyfikatora $\forall x$. Często jednak nad ścisłość matematyczną (która jest oczywiście bardzo ważna!) przedkładamy jednoznaczność zapisu. Pisząc $\exists$, który z małych kwantyfikatorów w formula mamy na myśli?

Pojęcie zasięgu kwantyfikatora nierozerwalnie łączy się z tzw. zmiennymi wolnymi i związanymi. Choć większość czytelników zapewne do tej pory nie miała styczności z definicją takich zmiennych, pojęcie to, co może wydawać się dość zaskakujące, powinno być znane wszystkim tym, którzy mieli już do czynienia z programowaniem na lekcjach lub zajęciach z informatyki.

Każdy (lub prawie każdy) program rozpoczyna się od tzw. deklaracji zmiennych. Piszemy wtedy, że np. k będzie zmienną typu *integer*, czyli będzie przyjmowała wartości całkowitoliczbowe, a l będzie zmienną typu *string* i będzie ciągiem znaków. Ważną cechą deklarowanych zmiennych jest to, że użytkownik może określić ich wartości np. wpisując je z klawiatury. Może być też tak, że sam program będzie pod zmienną k czy l zapisywał wartości pewnych funkcji wyznaczone w trakcie wykonywania kodu. Innymi słowy zmienne mogą przyjmować dowolne wartości (z odpowiednich zakresów oczywiście) i raz mogą być np. liczbą 2 a innym razem 5 w zależności od wyborów użytkownika. W matematyce takie zmienne będziemy nazywać zmiennymi wolnymi.

W kodach źródłowych programów komputerowych pojawia się również drugi typ zmiennej, tzw. zmienna związana. Zmienne takie występują np. w pętlach. Zauważmy, że w poniższym kodzie

```
s ← 0
for i = 1 to 10 do
    s ← s + i
end for
```

wartości zmiennej i są z góry ustalone i nie mogą być zmienione dowolnie przez użytkownika. Zmienna i nie przechowuje żadnych danych, jest jedynie wskaźnikiem czy licznikiem, a jej jedynym celem jest zapewnienie, by dana procedura była wykonana dokładnie dziesięć razy.

Formalnie zmienne związane i wolne definiuje się następująco.

Definicja 1.4.5. Zmienna x występująca w danym miejscu w formule zdaniowej jest *w tym miejscu związana*, jeżeli występuje

- bezpośrednio po kwantyfikatorze lub
- w zasięgu kwantyfikatora, po którym napisana jest zmienna x.

Zmienna występująca w formule jest *związana w tej formule*, gdy jest związana na każdym miejscu, na którym występuje. Zmienną, która nie jest związana w formule, nazywamy *zmienną wolną*.

Przykład 1.4.6. W formule $\forall x \quad (P(x) \vee Q(x))$ zmienna x występuje w trzech miejscach i w każdym z tych miejsc jest związana; na pierwszym (licząc od strony lewej), gdyż występuje bezpośrednio po kwantyfikatorze, a na drugim i trzecim, ponieważ występuje w zasięgu dużego kwantyfikatora, po którym napisany jest x. A zatem w tej formule zmienna x jest związana.

Zasięgiem dużego kwantyfikatora $\forall$ jest $(P(x) \vee Q(x))$.

Zauważmy również, że każda inna zmienna niż x, np. y, jest w tej formule wolna, gdyż w ogóle w niej nie występuje; tym bardziej nie występuje więc bezpośrednio po żadnym kwantyfikatorze ani w zasięgu żadnego kwantyfikatora, po którym napisana byłaby ta zmienna.

Przykład 1.4.7. Tym razem rozważmy formułę

$$\left[\exists x \, \forall y \quad P(x, y, z)\right] \to Q(x, y, z). \tag{1.1}$$

Zmienne x i y występują w niej trzy razy. Na dwóch pierwszych miejscach (licząc od strony lewej) są one związane, a na trzecim wolne (dlaczego?). W całej formule zmienne x i y są więc wolne. Z drugiej strony zmienna z na każdym z miejsc, w których występuje, jest wolna, a zatem jest wolna i w całej formule.

Wyrażenie $Q(x, y, z)$ nie występuje w zasięgu żadnego z kwantyfikatorów.

Zauważmy, że rozważaną formułę (1.1) można byłoby zapisać również tak

$$\left[\exists a \, \forall b \quad P(a, b, z)\right] \to Q(x, y, z).$$

W tym równoważnym zapisie wyraźnie widać, że za zmienne x, y, z (jako wolne) możemy podstawiać dowolne wartości. Oczywiście jest to również prawdą w przypadku formuły (1.1) z zastrzeżeniem, że w przypadku zmiennych x i y możemy podstawiać jedynie na te miejsca, w których te zmienne są wolne.

Zobaczmy jeszcze jeden przykład.

Przykład 1.4.8. Załóżmy, że zmienne x, y są liczbami rzeczywistymi i rozważmy następującą formułę języka predykatów $\exists x \quad x \cdot y = 1$. W formule tej zmienna x jest związana, a zmienna y jest wolna. Naszym celem będzie wyznaczenie tzw. *wykresu funkcji zdaniowej*, tzn. znalezienie tych wszystkich liczb $y \in \mathbb{R}$, które po wstawieniu do formuły będą zamieniały ją w zdanie prawdziwe.

Zastanówmy się zatem dla jakich liczb rzeczywistych y istnieje liczba rzeczywista x taka, że $x \cdot y = 1$. Dla wszystkich oprócz 0. Istotnie, dla dowolnego $y \neq 0$ możemy wybrać po prostu $x := \frac{1}{y}$ i wtedy $x \cdot y = 1$. Innymi słowy wykresem rozważanej przez nas formuły jest zbiór $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ciekawym pytaniem jest, czy wykres nie ulegnie zmianie, jeżeli zastąpimy kwantyfikator mały dużym, tzn. czy wykres funkcji zdaniowej $\forall x \quad x \cdot y = 1$ też jest równy $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Okazuje się, że nie; co więcej wykres w przypadku formuły $\forall x \quad x \cdot y = 1$ jest równy $\emptyset$. Gdyby bowiem istniała liczba $y \in \mathbb{R}$ taka, że $x \cdot y = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, oznaczałoby to, że $y = \frac{1}{x}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. A więc raz y byłby równy 1 (gdy za x wzięlibyśmy 1), a raz np. -1 (gdy za x wzięlibyśmy -1), a to jest przecież niemożliwe, bo y jest ustaloną, konkretną liczbą o jednoznacznej wartości.

Na koniec tego paragrafu postawmy sobie pytanie, które pewnie nurtuje niektórych czytelników. Dlaczego czasami piszemy *formuła* a czasami *zdanie*. Ma to ścisły związek z występowaniem w formule zmiennych wolnych.

Definicja 1.4.9. *Zdaniem* języka rachunku predykatów nazywamy formułę zdaniową tego języka nie zawierającą zmiennych wolnych.

Formuła $\exists x \;\; 2x + 1 = 9$ jest więc zdaniem, bo nie ma zmiennych wolnych, natomiast formuła $\exists x \;\; 2x + 1 = y$ nie jest zdaniem, ponieważ zawiera zmienną wolną y.

1.5 *Negowanie formuł języków rachunku zdań i predykatów*

W ostatnim paragrafie tego rozdziału zajmiemy się negowaniem formuł logicznych. Nie będziemy rozważać osobno języka rachunku zdań i języka predykatów, gdyż ten pierwszy jest częścią drugiego.

By negować formuły logiczne w języku predykatów należy stosować się do poniższych praw

$$\begin{aligned} &\neg(\neg p) \leftrightarrow p, && \neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q), \\ &\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q), && \neg(\exists x \; \psi(x)) \leftrightarrow \forall x \; (\neg\psi(x)), \\ &\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q), && \neg(\forall x \; \psi(x)) \leftrightarrow \exists x \; (\neg\psi(x)). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Zadanie domowe. Sprawdź metodą zero-jedynkową, że pierwsze cztery powyższe formuły są tautologiami języka rachunku zdań.

W przypadku negowania kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie *nie* negujemy warunku pod kwantyfikatorem, tzn.

$$\neg(\exists\varphi(x) \; \psi(x)) \leftrightarrow \forall\varphi(x) \; (\neg\psi(x)),$$
$$\neg(\forall\varphi(x) \; \psi(x)) \leftrightarrow \exists\varphi(x) \; (\neg\psi(x)).$$

Dowody praw dla kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie wynikają bezpośrednio z tautologii (1.2). Dla przykładu sprawdźmy, że zachodzi wzór

$$\neg(\exists\varphi(x) \; \psi(x)) \leftrightarrow \forall\varphi(x) \; (\neg\psi(x)).$$

Mamy

$$\begin{aligned} \neg(\exists\varphi(x) \; \psi(x)) &\leftrightarrow \neg(\exists x \; \varphi(x) \wedge \psi(x)) \\ &\leftrightarrow \forall x \; \neg(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \end{aligned}$$

Korzystamy z prawda de Morgana

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

oraz zamiany implikacji na alternatywę

$$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

$$
\begin{aligned}
&\leftrightarrow \forall x\ (\neg\varphi(x) \vee \neg\psi(x))\\
&\leftrightarrow \forall x\ (\varphi(x) \to \neg\psi(x))\\
&\leftrightarrow \forall\varphi(x)\ (\neg\psi(x)).
\end{aligned}
$$

Zadanie domowe. Rozumując podobnie jak w powyższym przykładzie pokaż, że

$$\neg(\forall\varphi(x)\ \psi(x)) \leftrightarrow \exists\varphi(x)\ (\neg\psi(x)).$$

Wskazówka: należy skorzystać z drugiego z praw de Morgana $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

Przejdziemy teraz do przykładów.

Przykład 1.5.1. Niech P, Q, R oznaczają pewne predykaty jednoargumentowe. Zanegujemy formułę $\forall x\ [P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))]$. Mamy

$$
\begin{aligned}
\neg\forall x\ [P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))] &\leftrightarrow \exists x\ \neg[P(x) \to (Q(x) \wedge R(x))]\\
&\leftrightarrow \exists x\ [P(x) \wedge \neg(Q(x) \wedge R(x))]\\
&\leftrightarrow \exists x\ [P(x) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg R(x))].
\end{aligned}
$$

Przykład 1.5.2. Niech P będzie pewnym predykatem dwuargumentowym, a Q, R predykatami jednoargumentowymi. Zanegujemy formułę $\big[\exists z\ \neg R(z)\big] \to \big[\exists x\ \forall y\ (P(x) \vee Q(x))\big]$. Mamy

$$
\begin{aligned}
&\neg\big\{\big[\exists z\ \neg R(z)\big] \to \big[\exists x\ \forall y\ (P(x) \vee Q(x))\big]\big\}\\
&\qquad\leftrightarrow \big[\exists z\ \neg R(z)\big] \wedge \neg\big[\exists x\ \forall y\ (P(x) \vee Q(x))\big]\\
&\qquad\leftrightarrow \big[\exists z\ \neg R(z)\big] \wedge \big[\forall x\ \neg\forall y\ (P(x) \vee Q(x))\big]\\
&\qquad\leftrightarrow \big[\exists z\ \neg R(z)\big] \wedge \big[\forall x\ \exists y\ \neg(P(x) \vee Q(x))\big]\\
&\qquad\leftrightarrow \big[\exists z\ \neg R(z)\big] \wedge \big[\forall x\ \exists y\ (\neg P(x) \wedge \neg Q(x))\big].
\end{aligned}
$$

Przykład 1.5.3. Fakt, że ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma skończoną granicę g możemy zapisać w języku predykatów następująco $\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant k\ \ |a_n - g| \leqslant \varepsilon$. Zanegujmy to zdanie. Mamy

$$
\begin{aligned}
&\neg\forall\varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant k\ \ |a_n - g| \leqslant \varepsilon\\
&\qquad\leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \neg\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant k\ \ |a_n - g| \leqslant \varepsilon\\
&\qquad\leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \neg\forall n \geqslant k\ \ |a_n - g| \leqslant \varepsilon\\
&\qquad\leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant k\ \ \neg(|a_n - g| \leqslant \varepsilon)\\
&\qquad\leftrightarrow \exists\varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant k\ \ |a_n - g| > \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Zaprzeczeniem zdania *Liczba* a *jest mniejsza lub równa od liczby* b jest zdanie *Liczba* a *jest większa od liczby* b, tzn. $\neg(a \leqslant b) \leftrightarrow (a > b)$.

Literatura

Niniejszy rozdział został przygotowany głównie w oparciu o następujące materiały.

[1] S. Antoniuk, *Podstawowe operacje logiczne, zbiory i operacje na zbiorach - materiały do zajęć ze Wstępu do matematyki*. http://antoniuk.home.amu.edu.pl/WDM/Logika.pdf

[2] T. Batóg, *Podstawy logiki*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2003.

[3] M. Borkowski, *Wstęp do teorii mnogości – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2006.

[4] M. Borkowski, P. Rzonsowski, konsultacje: I. Bondecka-Krzykowska, *Metoda zerojedynkowa*, http://rzonsol.pl/materialyelearning/elerning-rep/metoda01/index.html

[5] W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2005.

[6] M. Kaluba, *Wstęp do matematyki – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2012.

[7] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2009.

[8] W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1999.

[9] R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2005.

[10] J. Musielak, *Wstęp do matematyki*, PWN, Warszawa, 1970.