Granica lewostronna funkcji w punkcie (definicja Cauchy'ego). Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie b lewostronną granicę

- $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{x\to b^-} f(x) = g$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in (a,b)$ takich, że $b - \delta < x < b$,
- $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) > M$ dla każdego $x \in (a,b)$ takiego, że $b - \delta < x < b$,
- $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) < -M$ dla każdego $x \in (a,b)$ takiego, że $b - \delta < x < b$.

Granica prawostronna funkcji w punkcie (definicja Cauchy'ego). Funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma w punkcie a prawostronną granicę

- $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{x\to a^+} f(x) = g$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in (a,b)$ takich, że $a < x < a + \delta$,
- $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) > M$ dla każdego $x \in (a,b)$ takiego, że $a < x < a + \delta$,
- $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) < -M$ dla każdego $x \in (a,b)$ takiego, że $a < x < a + \delta$.

Otoczeniem punktu $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nazwiemy

- przedział (a,b) taki, że $c \in (a,b)$, jeżeli $c \in \mathbb{R}$,
- przedział $(-\infty, b)$, jeżeli $c = -\infty$,
- przedział $(a, +\infty)$, jeżeli $c = +\infty$.

Granica funkcji (definicja Heinego). Niech O_c będzie otoczeniem punktu $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Powiemy, że $g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ jest *granicą* funkcji $f\colon O_c \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ w punkcie c, co zapisujemy $\lim_{x\to c} f(x) = g$, jeżeli dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o elementach należących do zbioru $O_c \setminus \{c\}$ takiego, że $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, mamy $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$.

Jeżeli w definicji granicy Heinego założymy, że $c \in \mathbb{R}$ i będziemy rozważać jedynie ciągi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, których wyrazy są mniejsze od c, tzn. $x_n \in (a,c)$ dla $n \in \mathbb{N}$, to otrzymamy definicję *granicy lewostronnej* w punkcie c. Podobnie, jeżeli $x_n \in (c,b)$ dla $n \in \mathbb{N}$, to otrzymamy definicję *granicy prawostronnej* w punkcie c.

Definicja Cauchy'ego vs. definicja Heinego. Definicje Cauchy'ego oraz Heinego granicy są równoważne, tzn. jeżeli funkcja spełnia jedną z nich, to spełnia także i drugą. Dlatego też w poszczególnych sytuacjach możemy korzystać z tej definicji, która jest łatwiejsza w użyciu.

Granica funkcji w punkcie vs. granice jednostronne. Funkcja $f\colon (a,c)\cup(c,b)\to\mathbb{R}$ posiada w punkcie c granicę $g\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy posiada w tym punkcie obie granice jednostronne, które dodatkowo są równe tzn. $\lim_{x\to c} f(x)=g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x\to c^-} f(x)=g$ oraz $\lim_{x\to c^+} f(x)=g$.

Ważne granice 1. Poniżej zebrano podstawowe granice funkcji w punkcie:

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty$, gdy $a\in(0,1)$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$, gdy $a>1$,
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$,
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a$ dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$.

Ważne granice 2. Poniżej zebrano podstawowe granice funkcji w nieskończonościach:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, gdy $a>1$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, gdy $a>1$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$, gdy $a\in(0,1)$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$, gdy $a\in(0,1)$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$, gdy $a>1$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$, gdy $a\in(0,1)$,
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$ dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$.

Ciągłość funkcji. Funkcję $f\colon(a,b)\to\mathbb{R}$ nazywamy *ciągłą w punkcie* $c\in(a,b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych równoważnych warunków

- $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$,
- $\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$,
- dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ taka, że $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$ dla każdego punktu $x\in(a,b)$ takiego, że $|x-c|<\delta$,
- dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach z przedziału (a,b) zbieżnego do punktu c ciąg $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(c)$.

Funkcję $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ nazywamy *ciągłą*, jeżeli jest ona ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Okazuje się, że funkcje elementarne (tzn. wielomiany, funkcje trygonometryczne, funkcja potęgowa, funkcje wykładnicza i logarytmiczna) są ciągłe w swoich dziedzinach naturalnych.

<u>Pochodna funkcji</u>. Niech funkcja f będzie określona w przedziale otwartym zawierającym punkt a. *Pochodną funkcji* f *w punkcie* a nazywamy skończoną granicę (jeżeli istnieje)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

O funkcji, która ma pochodną w punkcie a mówimy również, że jest ona *różniczkowalna* w punkcie a.

<u>Monotoniczność funkcji I</u>. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale (a, b).

- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b).
- Jeżeli $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest funkcją stałą w przedziale (a, b).
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b).

<u>Monotoniczność funkcji II</u>. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale (a, b).

- Funkcja f jest niemalejąca w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geqslant 0$ dla $x \in (a, b)$.
- Funkcja f jest nierosnąca w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \leqslant 0$ dla $x \in (a, b)$.

<u>Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego</u>. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale (a, b). Jeżeli f ma w punkcie $c \in (a, b)$ ekstremum lokalne, to $f'(c) = 0$.

<u>Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego 1</u>. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w pewnym przedziale otwartym zawierającym c oraz niech $f'(c) = 0$. W punkcie c funkcja f ma

- minimum lokalne, gdy istnieje takie $\delta > 0$, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (c - \delta, c)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (c, c + \delta)$,
- maksimum lokalne, gdy istnieje takie $\delta > 0$, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (c - \delta, c)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (c, c + \delta)$.

<u>Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego 2</u>. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w pewnym przedziale otwartym zawierającym c oraz niech $f'(c) = 0$.

- Jeżeli $f''(c) > 0$, to funkcja f ma w punkcie c minimum lokalne.
- Jeżeli $f''(c) < 0$, to funkcja f ma w punkcie c maksimum lokalne.

Reguła de l'Hospitala. Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi na przedziale (a, b) oraz niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$. Jeżeli

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ lub
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ oraz $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$,

to $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pod warunkiem, że granica po prawej stronie istnieje.

(Formalnym) szeregiem potęgowym nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

Liczby rzeczywiste a_n, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nazywamy *współczynnikami* tego szeregu, a punkt c jego *środkiem*. Słowo „formalny" oznacza, że abstrahujemy od tego, czy dla danej wartości zmiennej x szereg ten jest zbieżny czy rozbieżny. (Zauważmy, że dla konkretnej wartości x szereg potęgowy staje się „zwykłym" szeregiem liczbowym, więc pytanie o jego zbieżność jest zupełnie naturalne.)

Promień zbieżności. Jeżeli dla danego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ istnieje granica $\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, to *promieniem zbieżności* tego szeregu nazywamy liczbę

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \text{jeżeli } \alpha \in (0, +\infty), \\ +\infty, & \text{jeżeli } \alpha = 0, \\ 0, & \text{jeżeli } \alpha = +\infty. \end{cases}$$

Uwaga: W niektórych przypadkach promień zbieżności łatwiej wyznaczyć obliczając wielkość α ze wzoru $\alpha := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Zbieżność szeregów potęgowych. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $R > 0$. Wtedy dla każdego $x \in (c - R, c + R)$ szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x-c|^n$$

(traktowane jako szeregi liczbowe) są zbieżne.

Podstawienie uniwersalne. W całkach trygonometrycznych możemy również wykorzystać tzw. *podstawienie* uniwersalne. Ponieważ

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{1}{2}x\right)} \quad \text{oraz} \quad \cos x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{1 + \mathrm{tg}^2\left(\frac{1}{2}x\right)},$$

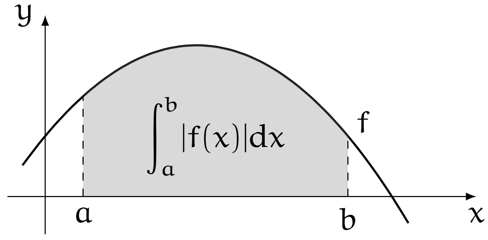
podstawiając $t = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$, otrzymujemy $x = 2\,\mathrm{arc\,tg}\, t$ oraz $dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$, jak również

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{oraz} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

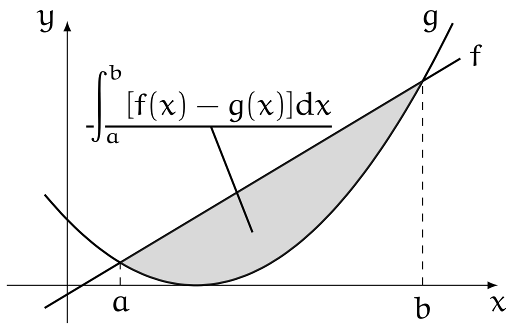
Całka oznaczona. Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$. Wówczas *całką oznaczoną* z funkcji f w przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej. Całka oznaczona $\int_a^b |f(x)|dx$ jest polem obszaru ograniczonego wykresem funkcji f, osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.



Pole obszaru pomiędzy wykresami funkcji. Pole obszaru ograniczonego z góry wykresem funkcji f, z dołu – wykresem funkcji g oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ można obliczyć ze wzoru $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.



Wyznacznik macierzy stopnia 2 można obliczyć ze wzoru

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Wyznacznik macierzy stopnia 3 można obliczyć ze *wzoru Sarrusa*

$$\begin{array}{c} \quad + \qquad + \qquad + \\ \det \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \\ \quad - \qquad - \qquad - \end{array} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ \quad -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{array}$$

Wyznacznik – rozwinięcia Laplace'a. *Wyznacznikiem* macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia n nazywamy liczbę $\det A$ (od słowa *determinant*) zdefiniowaną w następujący sposób:

- jeżeli $n = 1$, tj. $A = [a_{11}]$, to $\det A = a_{11}$,
- jeżeli $n > 1$, to $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$, gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$, powstałą z macierzy A poprzez skreślenie pierwszego wiersza oraz j-tej kolumny.

Macierz odwrotną do macierzy stopnia 2 można wyznaczyć ze wzoru

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Pochodne cząstkowe. Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych określoną na prostokącie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ oraz niech $(\xi, \eta) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$.

- *Pochodną cząstkową* funkcji f w punkcie (ξ, η) *względem pierwszej zmiennej* nazywamy granicę (o ile istnieje)
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi + h, \eta) - f(\xi, \eta)}{h}.$$
- *Pochodną cząstkową* funkcji f w punkcie (ξ, η) *względem drugiej zmiennej* nazywamy granicę (o ile istnieje)
$$\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi, \eta + h) - f(\xi, \eta)}{h}.$$

Pochodnymi cząstkowymi funkcji f, określonej na prostokącie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, nazywamy funkcje $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$, które punktom $(s, t) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ przyporządkowują wartości pochodnych cząstkowych w tych punktach, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(s, t)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(s, t)$.

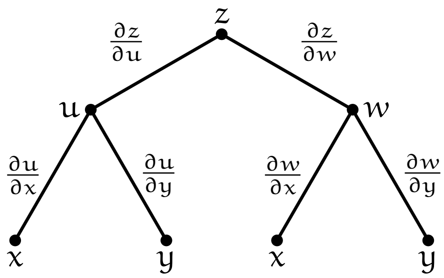
Pochodne wyższych rzędów. Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych określoną na prostokącie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. Załóżmy, że w każdym punkcie prostokąta $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ istnieją pochodne cząstkowe funkcji f. Pochodne cząstkowe tych pochodnych, jeżeli istnieją, nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego* funkcji f i oznaczamy symbolami

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Podobnie definiuje się pochodne trzeciego i wyższych rzędów.

Pochodnymi mieszanymi funkcji f nazywamy pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Reguła łańcuchowa. W celu obliczania pochodnych cząstkowych funkcji złożonych korzysta się z tzw. *reguły łańcuchowej*. Przypuśćmy, że chcemy obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $z = f(u, w)$, przy czym $u = g(x, y)$ oraz $w = h(x, y)$. W tym celu rysujemy drzewo zależności zmiennych



Poruszając się po drzewie od korzenia (wierzchołka z) do liści (wierzchołków x i y) wzdłuż krawędzi, otrzymujemy następujące wzoru

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Należy pamiętać, że poruszając się wzdłuż tej samej gałęzi (czyli ciągu krawędzi prowadzących od korzenia do liścia) należy poszczególne „wyniki" mnożyć, a w przypadku zmiany gałęzi należy „wyniki" dodawać.

Ekstrema lokalne. Mówimy, że funkcja f określona na prostokącie otwartym $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ osiąga w punkcie $(\xi, \eta) \in D$

- *maksimum lokalne*, gdy istnieje taki prostokąt otwarty $U \subseteq D$ zawierający punkt (ξ, η), że dla wszystkich $(x, y) \in U$ zachodzi $f(\xi, \eta) \geqslant f(x, y)$,
- *minimum lokalne*, gdy istnieje taki prostokąt otwarty $U \subseteq D$ zawierający punkt (ξ, η), że dla wszystkich $(x, y) \in U$ zachodzi $f(\xi, \eta) \leqslant f(x, y)$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego. Jeżeli funkcja $f\colon (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \to \mathbb{R}$ osiąga w punkcie (ξ, η) ekstremum lokalne i ma w tym punkcie pochodne cząstkowe, to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) = 0.$$

Hesjan. Niech $f\colon (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, która posiada pochodne cząstkowe drugiego rzędu. *Hesjanem* funkcji f nazywamy następujący wyznacznik funkcyjny

$$H(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Samą macierz drugich pochodnych nazywamy *macierzą Hessego*.

<u>Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego 1</u>. Niech f będzie funkcją zdefiniowaną na prostokącie otwartym zawierającym punkt (ξ, η), która posiada ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, oraz niech $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) = 0$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) = 0$.

- Jeśli $H(\xi, \eta) > 0$, to funkcja f w punkcie (ξ, η) ma ekstremum lokalne, przy czym jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \eta) > 0$, to jest to minimum, a jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \eta) < 0$, to jest to maksimum.
- Jeśli $H(\xi, \eta) < 0$, to funkcja f w punkcie (ξ, η) nie ma ekstremum lokalnego. W punkcie (ξ, η) występuje tzw. *punkt siodłowy*.
- Jeśli $H(\xi, \eta) = 0$, to kwestia istnienia w punkcie (ξ, η) ekstremum lokalnego funkcji f nie jest rozstrzygnięta.

<u>Warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego 2</u>. Niech f będzie funkcją n zmiennych zdefiniowaną na prostokącie otwartym zawierającym punkt $\xi := (\xi_1, \xi_2, \ldots, x_n)$, która posiada ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz niech

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) = 0 \text{ dla każdego } i = 1, \ldots, n.$$

Ponadto dla $i = 1, \ldots, n$ niech

$$H_i(\xi) := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\xi) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i}(\xi) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\xi) \end{bmatrix}.$$

- Jeśli $H_i(\xi) > 0$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, to funkcja f posiada w punkcie ξ minimum lokalne.
- Jeśli $(-1)^i H_i(\xi) > 0$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, to funkcja f posiada w punkcie ξ maksimum lokalne.
- Jeśli ciąg kolejnych hesjanów $H_i(\xi)$, gdzie $i \in \{1, \ldots, n\}$, nie spełnia żadnego z dwóch powyższych warunków, to o ile $H_i(\xi) \neq 0$ dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie ξ.