Wzory skróconego mnożenia. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ mamy

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \qquad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

Wzory Viete'a. Dla pierwiastków $x_1$, $x_2$ trójmianu $ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$, prawdziwe są wzory:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}, \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}, \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}.$$

Funkcją wymierną nazywamy funkcję będącą ilorazem dwóch wielomianów

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

gdzie $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_n, \ldots, a_1, a_0, b_m, \ldots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ przy czym $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór $\mathbb{R}$ z pominięciem tych liczb, dla których mianownik przyjmuje wartość zero.

Ułamkiem prostym nazywamy każdą funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{lub} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^l},$$

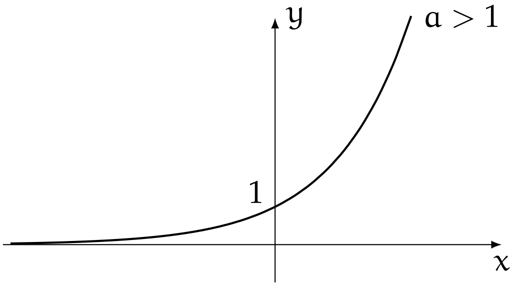
gdzie $k, l \in \mathbb{N}$, $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $b^2 - 4c < 0$. Okazuje się, że każdą funkcję wymierną, której licznik ma stopień mniejszy niż mianownik, można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych. Przykładowo

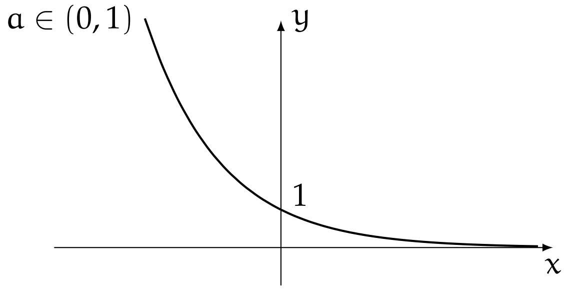
$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$
$$\frac{x^5 + x^2 - 1}{(x^2+1)^3(x+4)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^3}.$$

Własności działań na potęgach. Dla dowolnych $a, b \in (0, +\infty)$ oraz dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
- $a^x : a^y = a^{x-y}$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ daną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą.

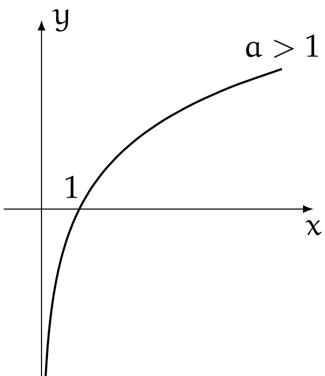


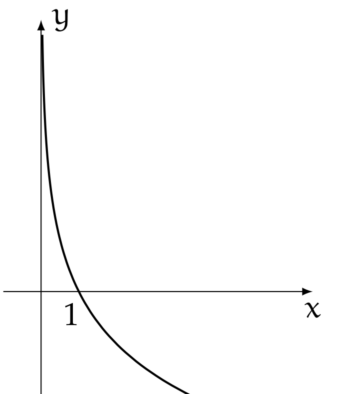




Własności logarytmów. Dla dowolnych $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in (0,+\infty)$ takich, że $a, a_1, a_2 \neq 1$ oraz dowolnego $k \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:

- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$,
- $\log_a(b_1 : b_2) = \log_a b_1 - \log_a b_2$,
- $\log_a b^k = k \log_a b$,
- $\log_{a_1} b = \frac{\log_{a_2} b}{\log_{a_2} a_1}$,
- $a^{\log_a b} = b$.

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \neq 1$ jest ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą. Okazuje się, że funkcja logarytmiczna $x \mapsto \log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $x \mapsto a^x$.



<u>WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ</u> liczby rzeczywistej $x$ nazywamy liczbę $|x|$ określoną wzorem

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jeżeli } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{jeżeli } x < 0. \end{cases}$$

<u>WŁASNOŚCI WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ</u>. Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

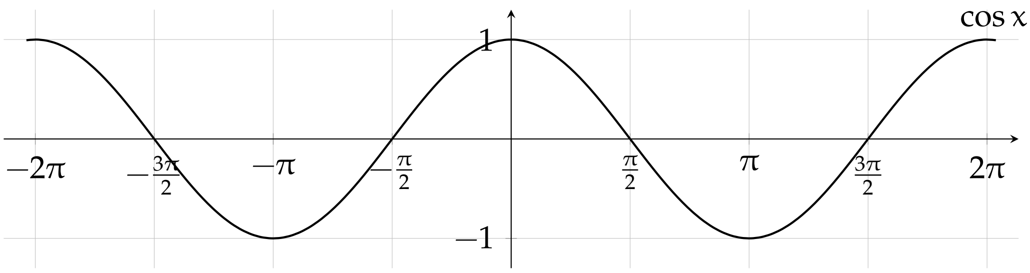
- $|x| \geqslant 0$,
- $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$,
- $|-x| = |x|$,
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,
- $|x - y| \leqslant |x| + |y|$,
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
- $|x : y| = |x| : |y|$, o ile $y \neq 0$,
- $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

<u>WŁASNOŚCI WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ 2</u>. Niech $a \geqslant 0$. Wtedy

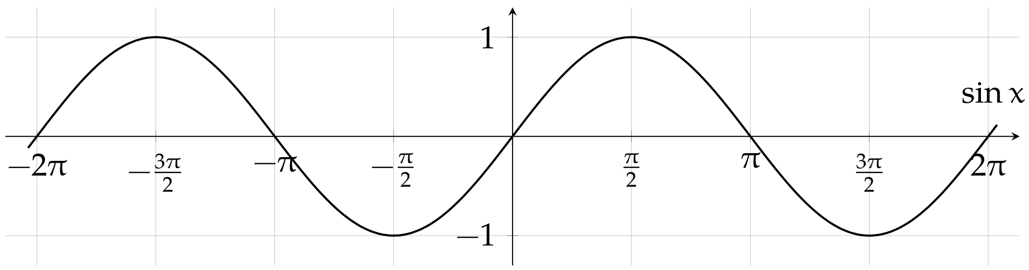
- $|x| = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = a$ lub $x = -a$,
- $|x| \leqslant a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-a \leqslant x \leqslant a$,
- $|x| \geqslant a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \geqslant a$ lub $x \leqslant -a$.

UWAGA: Powyższe własności pozostają w mocy, gdy zastąpimy znaki nierówności $\leqslant$ i $\geqslant$ znakami $<$ i $>$.

<u>KOSINUSOIDA</u>. Wykres funkcji $f(x) = \cos x$ nazywa się *kosinusoidą*.




<u>SINUSOIDA</u>. Wykres funkcji $f(x) = \sin x$ nazywa się *sinusoidą*.



Wartości funkcji trygonometrycznych. W poniższej tabeli zebrano wartości funkcji trygonometrycznych dla podstawowych kątów. Symbol „n.i." oznacza, że dana wartość nie istnieje.

| $\alpha$ | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ | $210°$ | $225°$ | $240°$ | $270°$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | n.i. | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | n.i. |
| $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | n.i. | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | n.i. | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

Znaki funkcji trygonometrycznych. W poniższej tabeli zebrano „znaki" funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach. Symbol „+" oznacza, że funkcja trygonometryczna przyjmuje w danej ćwiartce wartość dodatnią, symbol „−" – wartość ujemną.

| $\alpha \in$ | $(0°, 90°)$ | $(90°, 180°)$ | $(180°, 270°)$ | $(270°, 360°)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $\cos\alpha$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Wzory redukcyjne. Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów innych niż kąty ostre można posługiwać się poniższymi wzorami redukcyjnymi.

| $\beta$ | $-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ | $2\pi-\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\beta$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| $\cos\beta$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $\mathrm{tg}\,\beta$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ |
| $\mathrm{ctg}\,\beta$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{tg}\,\alpha$ | $-\mathrm{ctg}\,\alpha$ |

Tożsamości trygonometryczne. Poniżej zebrano podstawowe tożsamości trygonometryczne:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
- $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
- $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$,
- $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta:

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$,
- $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$,
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
- $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów:

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$,
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$,
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$,
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych:

- $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,
- $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$,
- $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$,
- $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Z powyższych tożsamości otrzymujemy również:

- $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$,
- $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)$,
- $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$.

Równoliczność zbiorów. dwa zbiory $X$ i $Y$ są *równoliczne* (co zapisujemy $X \sim Y$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f\colon X \to Y$ odwzorowująca wzajemnie jednoznacznie zbiór $X$ na $Y$. Można np. pokazać, że odcinek $(0,1)$ jest równoliczny z kwadratem bez brzegu o boku długości 1.

Twierdzenie Cantora–Bernsteina. Jeżeli zbiór $A$ jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru $B$, a zbiór $B$ jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru $A$, to zbiory $A$ i $B$ są równoliczne. W szczególności, jeżeli $C \subseteq B \subseteq A$ oraz $A \sim C$, to również $B \sim A$ oraz $B \sim C$.

Zbiory skończone i nieskończone. Zbiór $X$ jest *nieskończony*, gdy jest on równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym $A$ (właściwym tzn. takim, że $A \subseteq X$, ale $A \neq X$). Mówimy, że zbiór $X$ jest *skończony*, gdy nie jest on nieskończony.

Najprostszymi przykładami zbiorów nieskończonych są zbiory liczbowe: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ czy $\mathbb{R}$. Przykładami zbiorów skończonych są $\mathbb{Z}_n$ dla $n \geqslant 2$. Zbiór pusty jest również zbiorem skończonym.

Zbiór przeliczalny. Zbiór $X$ nazywamy *przeliczalnym*, gdy $X$ jest skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Okazuje się, że niepusty zbiór jest przeliczalny, gdy wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg (skończony lub nieskończony). Co więcej suma mnogościowa przeliczalnej liczby zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

Zbiory mocy $\aleph_0$. Wśród zbiorów przeliczalnych specjalne miejsce zajmują zbiory nieskończone. Są one równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych. Ich moc (liczebność) oznacza się symbolem $\aleph_0$ (czytaj: alef zero). Z samej definicji zbiór $\mathbb{N}$ ma moc $\aleph_0$. Jak zobaczymy w zadaniach moc $\aleph_0$ mają również zbiory $\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Q}$.

Zbiory mocy $\mathfrak{c}$. Zbiór równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nazywamy zbiorem mocy *kontinuum*. Skrótowo możemy napisać, że zbiór taki ma moc $\mathfrak{c}$. W teorii mocy dowodzi się, że $P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, a zatem zbiór $P(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych ma moc kontinuum. W konsekwencji $\aleph_0 < \mathfrak{c}$, co oznacza, że zbiór liczb rzeczywistych ma „znacznie więcej" elementów niż zbiór liczb naturalnych (a zatem i wymiernych).

Twierdzenie o trzech ciągach. Jeżeli wyrazy ogólne ciągów $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniają nierówność $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz jeżeli ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mają wspólną granicę $g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, tzn. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma tę samą granicę, tj. $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Działania arytmetyczne na ciągach zbieżnych. Jeżeli ciągi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne odpowiednio do liczb $a$ oraz $b$, tzn. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, to

- ciąg $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do $a + b$, tzn. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$,
- ciąg $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do $a - b$, tzn. $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$,
- ciąg $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do $a \cdot b$, tzn. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
- ciąg $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega do $\frac{a}{b}$, tzn. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, o ile $b \neq 0$ oraz $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Symbole nieoznaczone. W powyższym twierdzeniu ograniczyliśmy się do ciągów zbieżnych z uwagi na możliwość wystąpienia tzw. *symboli nieoznaczonych*, które, jak wskazuje nazwa, nie mają jednoznacznie ustalonej wartości. Symbolami nieoznaczonymi są: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$.

Monotoniczność ciągu. Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy

- *rosnącym*, gdy $a_n < a_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- *malejącym*, gdy $a_{n+1} < a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- *niemalejącym*, gdy $a_n \leqslant a_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- *nierosnącym*, gdy $a_{n+1} \leqslant a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Ważne granice. Poniżej zebrano podstawowe granice ciągów:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, jeżeli $a > 0$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, jeżeli $|a| < 1$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$, jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Szereg. Niech dany będzie pewien ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wyrażenie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ nazywamy *szeregiem*, liczby $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *wyrazami szeregu*, a element $a_n$ – *wyrazem ogólnym szeregu*. Szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ skrótowo oznaczamy również $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Sumy częściowe szeregu. Niech dany będzie pewien ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ciąg $s_1 := a_1$, $s_2 := a_1 + a_2$, $\ldots$, $s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$ nazywamy ciągiem *sum częściowych* szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Suma szeregu. Niech dany będzie pewien ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Jeżeli ciąg $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do granicy skończonej $s$, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny*, a liczbę $s$ nazywamy *sumą* tego szeregu piszemy wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Szereg, który nie jest zbieżny nazywamy *szeregiem rozbieżnym*.

Warunek konieczny zbieżności szeregu. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Kryterium ilorazowe (d'Alemberta). Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz niech $\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Wówczas:

- jeżeli $\alpha < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- jeżeli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,
- jeżeli $\alpha = 1$, to kryterium ilorazowe (d'Alemberta) nie rozstrzyga zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tzn. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ może być zbieżny lub rozbieżny.

Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego). Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n \geqslant 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz niech $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Wówczas:

- jeżeli $\alpha < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- jeżeli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,
- jeżeli $\alpha = 1$, to kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego) nie rozstrzyga zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tzn. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ może być zbieżny lub rozbieżny.

<u>Kryterium porównawcze</u>. Załóżmy, że $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant n_0$, gdzie $n_0$ jest pewną ustaloną liczbą naturalną. Wówczas:

- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Uwaga: Szeregiem, z którym najczęściej porównujemy dany szereg w kryterium porównawczym, jest *szereg Dirichleta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a}}.$$

Jeżeli $a \in (0, 1]$, to szereg Dirichleta jest rozbieżny do $+\infty$, natomiast jeżeli $a > 1$, to szereg Dirichleta jest zbieżny.