**Wartości logiczne.** Sens spójników logicznych określa następująca tabelka:

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \to q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 1 |

**Jak negować formuły?** Należy stosować się do poniższych praw:

- $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$,
- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,
- $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$,
- $\neg(\exists x\ \psi(x)) \leftrightarrow \forall x\ (\neg \psi(x))$,
- $\neg(\forall x\ \psi(x)) \leftrightarrow \exists x\ (\neg \psi(x))$.

W przypadku negowania kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie *nie* negujemy warunku pod kwantyfikatorem, tzn.

- $\neg(\exists \varphi(x)\ \psi(x)) \leftrightarrow \forall \varphi(x)\ (\neg \psi(x))$,
- $\neg(\forall \varphi(x)\ \psi(x)) \leftrightarrow \exists \varphi(x)\ (\neg \psi(x))$.

**Wartości funkcji trygonometrycznych.** W poniższej tabeli zebrano wartości funkcji trygonometrycznych dla podstawowych kątów. Symbol „n.i." oznacza, że dana wartość nie istnieje.

| $\alpha$ | $0^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $150^\circ$ | $180^\circ$ | $210^\circ$ | $225^\circ$ | $240^\circ$ | $270^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | n.i. | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | n.i. |
| $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | n.i. | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | n.i. | $\sqrt{3}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ |

**Znaki funkcji trygonometrycznych.** W poniższej tabeli zebrano „znaki" funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach. Symbol „$+$" oznacza, że funkcja trygonometryczna przyjmuje w danej ćwiartce wartość dodatnią, symbol „$-$" – wartość ujemną.

| $\alpha \in$ | $(0^\circ, 90^\circ)$ | $(90^\circ, 180^\circ)$ | $(180^\circ, 270^\circ)$ | $(270^\circ, 360^\circ)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $+$ | $+$ | $-$ | $-$ |
| $\cos\alpha$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $\mathrm{ctg}\,\alpha$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ |

Wzory redukcyjne. Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów innych niż kąty ostre można posługiwać się poniższymi wzorami redukcyjnymi.

| $\beta$ | $-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{\pi}{2}+\alpha$ | $\pi-\alpha$ | $\pi+\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}-\alpha$ | $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ | $2\pi-\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\beta$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| $\cos\beta$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| $\operatorname{tg}\beta$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ |
| $\operatorname{ctg}\beta$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |

Własności logarytmów. Dla dowolnych $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in (0, +\infty)$ takich, że $a, a_1, a_2 \neq 1$ oraz dowolnego $k \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:

- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$,
- $\log_a(b_1 : b_2) = \log_a b_1 - \log_a b_2$,
- $\log_a b^k = k \log_a b$,
- $\log_{a_1} b = \frac{\log_{a_2} b}{\log_{a_2} a_1}$,
- $a^{\log_a b} = b$.

Symbol Newtona. Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $0 \leqslant k \leqslant n$ mamy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

oraz

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ (n-1)! \cdot n & \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Wzór dwumianowy Newtona. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b$ oraz dowolnego $n \in N \cup \{0\}$ *wzorem dwumianowym Newtona* nazywamy równość

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Wykorzystując znak sumy wzór dwumianowy Newtona można zapisać w postaci

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Znak sumy. Rozważmy skończony ciąg liczb $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Sumę $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$ wszystkich elementów tego ciągu możemy skrótowo zapisać za pomocą wielkiej litery sigma $\sum$ w postaci

$$\sum_{i=m}^{n} a_i.$$

Wskaźnik $i$ nazywamy *wskaźnikiem sumowania*, natomiast $m$ nazywamy *dolną granicą sumowania*, a $n$ – *górną granica sumowania*.

Własności znaku sumy. Znak sumy ma następujące własności:

- $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$, gdzie $m \leqslant k < n$,
- $\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$,
- $\sum_{i=m}^{n} c a_i = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$.

Własności relacji. Niech $R$ będzie relacją w zbiorze $X$, tj. $R \subseteq X \times X$. Relacja $R$ jest

- *zwrotna*, gdy $\forall x \in X \ \ xRx$,
- *symetryczna*, gdy $\forall x, y \in X \ \ (xRy \to yRx)$,
- *antysymetryczna*, gdy $\forall x, y \in X \ \ [(xRy \land yRx) \to x = y]$,
- *przechodnia*, gdy $\forall x, y, z \in X \ \ [(xRy \land yRz) \to xRz]$,
- *spójna*, gdy $\forall x, y \in X \ \ (xRy \lor yRx \lor x = y)$.

Relacją równoważności nazywamy relację, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Relacją częściowego porządku (lub po prostu *częściowym porządkiem*) nazywamy relację, która jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia.

Wariacja bez powtórzeń. $k$-wyrazową *wariacją bez powtórzeń* zbioru $X$ nazywamy każdy ciąg $(x_1, \ldots, x_k)$ elementów zbioru $X$, którego wyrazy nie mogą się powtarzać. Liczba $k$-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru $n$-elementowego jest równa $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Permutacja jest szczególnym typem wariacji bez powtórzeń. Permutacją $n$-elementowego zbioru $X$ nazywamy więc każdy ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ elementów zbioru $X$, którego wyrazy nie mogą się powtarzać. Liczba permutacji zbioru $n$-elementowego wynosi $n!$.

Wariacja z powtórzeniami. $k$-wyrazową *wariacją z powtórzeniami* zbioru $X$ nazywamy każdy ciąg $(x_1, \ldots, x_k)$ elementów tego zbioru. Liczba $k$-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru $n$-elementowego jest równa $n^k$.

Kombinacja bez powtórzeń. $k$-elementową *kombinacją bez powtórzeń* (lub po prostu *kombinacją*) zbioru $X$ nazywamy każdy $k$-elementowy podzbiór zbioru $X$. Liczba $k$-elementowych kombinacji zbioru $n$-elementowego wynosi $\binom{n}{k}$.

KOMBINACJA Z POWTÓRZENIAMI. $k$-elementową *kombinacją z powtórzeniami* zbioru $n$-elementowego $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ nazywamy każdy ciąg $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ taki, że $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, gdzie $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Traktując elementy zbioru $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ jako kolory, można $k$-elementową kombinację z powtórzeniami interpretować jako pomalowanie $k$ identycznych kul mając do dyspozycji $n$ kolorów w taki sposób, że $k_1$ kul pomalowanych jest kolorem $x_1$, $k_2$ kul kolorem $x_2$, itd. Liczba $k$-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru $n$-elementowego jest równa $\binom{n+k-1}{k}$.

KTÓRY ZE SCHEMATÓW WYBORU WYBRAĆ? Można posłużyć się poniższym zestawieniem.

| | *Czy kolejność wylosowanych elementów jest istotna?* | *Czy wylosowane elementy mogą się powtarzać?* |
|---|---|---|
| *wariacja bez powtórzeń* | tak | nie |
| *wariacja z powtórzeniami* | tak | tak |
| *kombinacja bez powtórzeń* | nie | nie |
| *kombinacja z powtórzeniami* | nie | tak |

OBRAZ I PRZECIWOBRAZ FUNKCJI. Rozważmy funkcję $f\colon X \to Y$ oraz dwa zbiory $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. *Obrazem zbioru* $A$ poprzez funkcję $f$ nazywamy zbiór $f(A) := \{f(x) : x \in A\}$. *Przeciwobrazem zbioru* $B$ poprzez funkcję $f$ nazywamy zbiór $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.

TRÓJMIAN KWADRATOWY. Rozważmy trójmian kwadratowy w *postaci ogólnej* $P(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$;

- *wyróżnikiem* (*wyznacznikiem*) trójmianu $P$ nazywamy liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$,
- pierwiastki wielomianu $P$ wyrażają się wzorami
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{oraz} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$
- dla pierwiastków $x_1$, $x_2$ trójmianu $P$ prawdziwe są wzory (zwane *wzorami Viete'a*):
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{oraz} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a},$$
- wykresem funkcji $P$ jest parabola, której wierzchołek znajduje się w punkcie $(p, q)$, gdzie
$$p = -\frac{b}{2a} \quad \text{oraz} \quad q = -\frac{\Delta}{4a},$$
- postać $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ nazywamy *postacią iloczynową* wielomianu $P$, a postać $P(x) = a(x - p)^2 + q$ *postacią kanoniczną*.

WZÓR WŁĄCZEŃ I WYŁĄCZEŃ. Niech $A, B, C$ będą zbiorami skończonymi oraz niech $|A|$ oznacza liczebność zbioru $A$. Wtedy

(a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

(b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.