

RACHUNEK CAŁKOWY

FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

TEORIA

CAŁKAMI ITEROWANYMI nazywamy całki postaci

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \dots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1,$$

gdzie f jest funkcją n zmiennych $(x_1, \dots, x_n)$ zdefiniowaną na prostokącie $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$. W przypadku funkcji g dwóch zmiennych, zdefiniowanej na prostokącie $[a, b] \times [c, d]$ całki iterowane przyjmują postać

$$\int_a^b \left(\int_c^d g(x, y) dy \right) dx \quad \text{lub} \quad \int_c^d \left(\int_a^b g(x, y) dx \right) dy$$

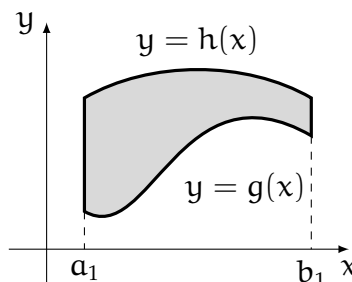
w zależności od tego, całkowanie względem, której zmiennej będziemy wykonywać jako pierwsze.

TWIERDZENIE FUBINIEGO DLA PROSTOKĄTA. Jeżeli funkcja f określona na prostokącie $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ jest ciągła, to jest ona całkowalna w A oraz zachodzi wzór

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

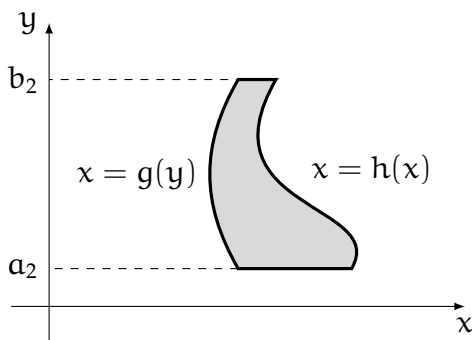
TWIERDZENIE FUBINIEGO DLA OBSZARÓW NORMALNYCH 1. Niech $g, h: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi oraz niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1 \text{ oraz } g(x) \leq y \leq h(x)\}$. Jeżeli $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to całka z funkcji f na zbiorze A istnieje oraz zachodzi wzór

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$



TWIERDZENIE FUBINIEGO DLA OBSZARÓW NORMALNYCH 2. Niech $g, h: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi oraz niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_2 \leq y \leq b_2 \text{ oraz } g(y) \leq x \leq h(y)\}$. Jeżeli $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to całka z funkcji f na zbiorze A istnieje oraz zachodzi wzór

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$



OBSZARY „ZŁOŻONE”. W przypadku gdy mamy do czynienia z obszarem A , który nie jest normalny, staramy się podzielić go na kawałki $A_1, \dots, A_n$, z których każdy będzie obszarem normalnym (względem osi OX lub OY) i korzystamy ze wzoru

$$\iint_A f(x, y) \, dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f(x, y) \, dx dy.$$

ZADANIA

Zadanie 22.10. Oblicz następujące całki iterowane:

(a) $\int_0^2 \left(\int_2^4 xy \, dy \right) dx,$

(e) $\int_0^1 \left(\int_x^{10x} \sqrt{yx - x^2} \, dy \right) dx,$

(b) $\int_2^4 \left(\int_0^2 xy \, dx \right) dy,$

(f) $\int_0^3 \left(\int_{x+1}^{2x+1} \frac{3}{\sqrt{y-x}} \, dy \right) dx,$

(c) $\int_0^1 \left(\int_x^{2x} (x - y + 1) \, dy \right) dx,$

(g) $\int_0^1 \left(\int_0^y e^{\frac{x}{y}} \, dx \right) dy,$

(d) $\int_0^1 \left(\int_x^{3x} (y + x - 1) \, dy \right) dx,$

(h) $\int_1^{\ln 3} \left(\int_0^x 6e^{x+2y} \, dy \right) dx.$

Zadanie 22.11. Oblicz następujące całki podwójne:

(a) $\iint_A x^2 y \, dx dy$, gdzie $A = [0, 3] \times [1, 3]$,

(b) $\iint_A 8y^3 x \, dx dy$, gdzie $A = [-2, 0] \times [0, 1]$,

(c) $\iint_A (x - 3y^2) \, dx dy$, gdzie $A = [0, 2] \times [1, 2]$,

(d) $\iint_A (6x^2y - 2y) \, dx \, dy$, gdzie $A = [1, 2] \times [0, 3]$,

(e) $\iint_A \frac{xy^2}{x^2 + 1} \, dx \, dy$, gdzie $A = [0, 1] \times [0, 3]$,

(f) $\iint_A y \cos(xy) \, dx \, dy$, gdzie $A = [1, 2] \times [0, \pi]$,

(g) $\iint_A xy e^{x^2y} \, dx \, dy$, gdzie $A = [0, 1] \times [0, 2]$,

(h) $\iint_A \frac{x}{1 + xy} \, dx \, dy$, gdzie $A = [0, 1] \times [0, 1]$.

Zadanie 22.12. Oblicz następujące całki podwójne:

(a) $\iint_A 2 \, dx \, dy$, gdzie A jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $y = x^2$ oraz $y = 8 - x^2$,

(b) $\iint_A 4x \, dx \, dy$, gdzie A jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $y = 2x^2$ oraz $y = 1 + x^2$,

(c) $\iint_A 30xy^2 \, dx \, dy$, gdzie A jest obszarem w pierwszej ćwiartce ograniczonym krzywymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ oraz $x = \sqrt{1 - y^2}$,

(d) $\iint_A (x + y) \, dx \, dy$, gdzie A jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $x = 0$, $y = 0$ oraz $y + x = 3$,

(e) $\iint_A 10y \, dx \, dy$, gdzie A jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $y = \sqrt{x}$ oraz $y = x^2$,

(f) $\iint_A e^{y^2} \, dx \, dy$, gdzie A jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $x = 0$, $y = 1$ oraz $y - x = 0$,

(g) $\iint_A 1 \, dx \, dy$, gdzie A jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $y = -x - 2$, $y = -7x + 10$ oraz $y = 2x + 1$,

(h) $\iint_A xy \, dx \, dy$, gdzie A jest obszarem ograniczonym krzywymi o równaniach $y = -x^2 + 4$, $y = 3\sqrt{x}$ oraz półprostą $(-\infty, 0]$.

Zadanie 22.13. Dokonując zamiany kolejności całkowania, oblicz:

(a) $\int_0^1 \left(\int_x^1 \sin(y^2) \, dy \right) dx$,

(c) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1 + x^3} \, dx \right) dy$,

(b) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2} \, dx \right) dy$,

(d) $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 \cos(x^{\frac{3}{2}}) \, dx \right) dy$.

ODPOWIEDZI

22.10 (a) Zgodnie z kolejnością wykonywania działań, zaczniemy od obliczenia “nawiasu”, czyli całki wewnętrznej. Mamy

$$\int_2^4 xy \, dy \stackrel{(1)}{=} x \int_2^4 y \, dy \stackrel{(2)}{=} x \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=2}^{y=4} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} x \cdot 4^2 - \frac{1}{2} x \cdot 2^2 = 8x - 2x = 6x,$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy współczynniki stałe (w tym także x) wyciągnąć przed całkę,
- (2) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 2$ oraz $y = 4$ do wyniku całki (pamiętajmy o kolejności: “granica górna” – “granica dolna”).

Zatem

$$\int_0^2 \left(\int_2^4 xy \, dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^2 6x \, dx \stackrel{(2)}{=} 6 \int_0^2 x \, dx \stackrel{(3)}{=} 6 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=2} \stackrel{(4)}{=} 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 0^2 = 12 - 0 = 12,$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $6x$,
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc możemy współczynnik stały 6 wyciągnąć przed całkę,
- (3) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,
- (4) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 2$ do wyniku całki.

Podsumowując

$$\int_0^2 \left(\int_2^4 xy \, dy \right) dx = 12.$$

(b) Podobnie jak poprzednio, rozpoczniemy od obliczenia całki wewnętrznej. Mamy

$$\int_0^2 xy \, dx \stackrel{(1)}{=} y \int_0^2 x \, dx \stackrel{(2)}{=} y \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=2} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} y \cdot 2^2 - \frac{1}{2} y \cdot 0^2 = 2y - 0 = 2y,$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc możemy współczynnik stały y wyciągnąć przed całkę,
- (2) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 2$ do wyniku całki.

Zatem

$$\int_2^4 \left(\int_0^2 xy \, dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_2^4 2y \, dy \stackrel{(2)}{=} 2 \int_2^4 y \, dy \stackrel{(3)}{=} 2 \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=2}^{y=4} \stackrel{(4)}{=} y^2 \Big|_{y=2}^{y=4} = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12,$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $2y$,
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy współczynnik stały 2 wyciągnąć przed całkę,
- (3) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,

(4) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 2$ oraz $y = 4$ do wyniku całki.

Podsumowując

$$\int_2^4 \left(\int_0^2 xy \, dx \right) dy = 12.$$

(c) Obliczenia zaczniemy od całki wewnętrznej. Mamy

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} (x - y + 1) \, dy &\stackrel{(1)}{=} \int_x^{2x} x \, dy - \int_x^{2x} y \, dy + \int_x^{2x} 1 \, dy \\ &\stackrel{(2)}{=} x \int_x^{2x} 1 \, dy - \int_x^{2x} y \, dy + \int_x^{2x} 1 \, dy \\ &\stackrel{(3)}{=} x \cdot y \Big|_{y=x}^{y=2x} - \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x}^{y=2x} + y \Big|_{y=x}^{y=2x} \\ &\stackrel{(4)}{=} x \cdot (2x - x) - \frac{1}{2} [(2x)^2 - x^2] + (2x - x) \\ &= x^2 - \frac{1}{2} [4x^2 - x^2] + x \\ &= x^2 - \frac{3}{2} x^2 + x = -\frac{1}{2} x^2 + x, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z faktu, że całka jest tzw. *operatorem liniowym*, tzn. można rozbić całkę sumy/różnicy na sumę/różnicę całek (np. $\int (y + y^2) \, dy = \int y \, dy + \int y^2 \, dy$),
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy współczynnik stały x wyciągnąć w pierwszej całce przed znak całki, tzn. $\int_x^{2x} x \, dy = x \int_x^{2x} 1 \, dy$,
- (3) wynika z tego, że $\int 1 \, dt = t + C$ oraz $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,
- (4) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = x$ oraz $y = 2x$ do wyniku całek.

Możemy teraz przejść do obliczenia całki zewnętrznej. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_x^{2x} (x - y + 1) \, dy \right) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} x^2 + x \right) dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_0^1 -\frac{1}{2} x^2 \, dx + \int_0^1 x \, dx \\ &\stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \, dx + \int_0^1 x \, dx \\ &\stackrel{(4)}{=} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &\stackrel{(5)}{=} -\frac{1}{6} (1^3 - 0^3) + \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) \\ &= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $-\frac{1}{2} x^2 + x$,
- (2) wynika z faktu, że możemy całkę sumy rozbić na sumę całek,

- (3) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc w pierwszej całce możemy współczynnik stały $-\frac{1}{2}$ wyciągnąć przed znak całki,
- (4) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$ oraz $\int t^2 \, dt = \frac{1}{3}t^3 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 1$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\int_0^1 \left(\int_x^{2x} (x - y + 1) \, dy \right) dx = \frac{1}{3}.$$

(d) Podobnie jak poprzednio, rozpoczniemy od obliczenia całki wewnętrznej. Mamy

$$\begin{aligned} \int_x^{3x} (y + x - 1) \, dy &\stackrel{(1)}{=} \int_x^{3x} y \, dy + \int_x^{3x} x \, dy - \int_x^{3x} 1 \, dy \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_x^{3x} y \, dy + x \int_x^{3x} 1 \, dy - \int_x^{3x} 1 \, dy \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x}^{y=3x} + x \cdot y \Big|_{y=x}^{y=3x} - y \Big|_{y=x}^{y=3x} \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} [(3x)^2 - x^2] + x(3x - x) - (3x - x) \\ &= \frac{1}{2} [9x^2 - x^2] + 2x^2 - 2x \\ &= 4x^2 + 2x^2 - 2x = 6x^2 - 2x, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z faktu, że całka jest tzw. *operatorem liniowym*, tzn. można rozbić całkę sumy/różnicy na sumę/różnicę całek (np. $\int (y + y^2) \, dy = \int y \, dy + \int y^2 \, dy$),
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy współczynnik stały x wyciągnąć w drugiej całce przed znak całki, tzn. $\int_x^{3x} y \, dy = x \int_x^{3x} 1 \, dy$,
- (3) wynika z tego, że $\int 1 \, dt = t + C$ oraz $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$,
- (4) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = x$ oraz $y = 3x$ do wyniku całek.

Możemy teraz przejść do obliczenia całki zewnętrznej. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_x^{3x} (y + x - 1) \, dy \right) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 (6x^2 - 2x) \, dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_0^1 6x^2 \, dx - \int_0^1 2x \, dx \\ &\stackrel{(3)}{=} 6 \int_0^1 x^2 \, dx - 2 \int_0^1 x \, dx \\ &\stackrel{(4)}{=} 6 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} - 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &\stackrel{(5)}{=} 2(1^3 - 0^3) - (1^2 - 0^2) \\ &= 2 - 1 = 1, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $6x^2 - 2x$,

- (2) wynika z faktu, że możemy całkę sumy rozbić na sumę całek,
- (3) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc w pierwszej całce możemy współczynnik stały 6 wyciągnąć przed znak całki; w drugiej tak samo postępujemy z czynnikiem 2,
- (4) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$ oraz $\int t^2 \, dt = \frac{1}{3}t^3 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 1$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\int_0^1 \left(\int_x^{3x} (y + x - 1) \, dy \right) dx = 1.$$

(e) Podobnie jak we wcześniejszych zadaniach, zaczniemy od obliczenia całki wewnętrznej

$$\int_x^{10x} \sqrt{yx - x^2} \, dy. \quad (\square)$$

Niestety w tym przykładzie proste metody całkowania, z których korzystaliśmy do tej pory, nie zadziałają. Byśmy mogli łatwo wybrać metodę całkowania, zauważmy, że zmienną całkowania jest y , a więc x traktujemy jako stałą, tzn. powyższa całka jest postaci (np. wybierając $x = 1$)

$$\int_1^{10} \sqrt{y - 1} \, dy.$$

Funkcje złożone (a taką jest właśnie funkcja podcałkowa $\sqrt{y - 1}$) zazwyczaj całkują się metodą podstawiania (podstawia się wtedy funkcję wewnętrzną; w przypadku funkcji $\sqrt{y - 1}$ podstawialibyśmy więc $t = y - 1$). Tak też postąpimy, by obliczyć ($\square$). Mamy

$$\begin{aligned} \int_x^{10x} \sqrt{yx - x^2} \, dy &= \left. \begin{array}{l} t = yx - x^2 \\ 1 \cdot dt \stackrel{(1)}{=} (1 \cdot x - 0) dy \\ \frac{1}{x} dt \stackrel{(2)}{=} dy \end{array} \right\} \stackrel{(3)}{=} \int_0^{9x^2} \sqrt{t} \cdot \frac{1}{x} dt \\ &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{x} \int_0^{9x^2} t^{\frac{1}{2}} dt \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_{t=0}^{t=9x^2} \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{2}{3x} [(9x^2)^{\frac{3}{2}} - 0] \\ &\stackrel{(7)}{=} \frac{2}{3x} \cdot 27x^3 = 18x^2, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = yx - x^2$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. y (co oznaczamy dopisując symbol dy),
- (2) wynika z obustronnego podzielenia równości (1) przez x ,
- (3) wynika z podstawienia t za wyrażenie $yx - x^2$ pod pierwiastek oraz zastąpienia dy przez $\frac{1}{x} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $y = x$ zamieni się na $t = x \cdot x - x^2 = x^2 - x^2 = 0$, a granica górna $y = 10x$ zamieni się na $t = 10x \cdot x - x^2 = 10x^2 - x^2 = 9x^2$),
- (4) wynika z tego, że zmienną całkowania jest t , a więc możemy współczynnik stały $\frac{1}{x}$ wyciągnąć przed znak całki; możemy również zamienić $\sqrt{t}$ na $t^{\frac{1}{2}}$,
- (5) wynika z tego, że $\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$,

(6) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 0$ oraz $t = 9x$ do wyniku całki,

(7) wynika z faktu, że $(9x^2)^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{9x^2})^3 = (3x)^3 = 27x^3$.

Pozostaje teraz obliczyć całkę zewnętrzną, ale to na szczęście będzie już znacznie prostsze. Mamy

$$\int_0^1 \left(\int_x^{10x} \sqrt{yx - x^2} dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 18x^2 dx \stackrel{(2)}{=} 18 \int_0^1 x^2 dx \stackrel{(3)}{=} 18 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} \stackrel{(4)}{=} 6(1^3 - 0^3) = 6,$$

gdzie równość

(1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $18x^2$,

(2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc możemy współczynnik stały 18 wyciągnąć przed znak całki,

(3) wynika z tego, że $\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$,

(4) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 1$ do wyniku całki.

Podsumowując

$$\int_0^1 \left(\int_x^{10x} \sqrt{yx - x^2} dy \right) dx = 6.$$

(f) Tak jak to robiliśmy wczoraj, nasze obliczenia zaczniemy od całki wewnętrznej.

$$\int_{x+1}^{2x+1} \frac{3}{\sqrt{y-x}} dy.$$

Wzorując się na poprzednim przykładzie, skorzystamy z metody całkowania przez podstawienie. Mamy

$$\begin{aligned} \int_{x+1}^{2x+1} \frac{3}{\sqrt{y-x}} dy &= \left. \begin{array}{l} t = y - x \\ 1 \cdot dt \stackrel{(1)}{=} (1-0)dy \\ dt = dy \end{array} \right\} \stackrel{(2)}{=} \int_1^{x+1} \frac{3}{\sqrt{t}} dt \stackrel{(3)}{=} \int_1^{x+1} 3t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &\stackrel{(4)}{=} 3 \int_1^{x+1} t^{-\frac{1}{2}} dt \stackrel{(5)}{=} 6t^{\frac{1}{2}} \Big|_{t=1}^{t=x+1} \stackrel{(6)}{=} 6(\sqrt{x+1} - \sqrt{1}) = 6\sqrt{x+1} - 6, \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = y - x$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. y (co oznaczamy dopisując symbol dy),

(2) wynika z podstawienia t za wyrażenie $y - x$ pod pierwiastek oraz zastąpienia dy przez dt ; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $y = x + 1$ zamieni się na $t = (x + 1) - x = 1$, a granica górna $y = 2x + 1$ zamieni się na $t = (2x + 1) - x = x + 1$),

(3) wynika z faktu, że $\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}}$,

(4) wynika z tego, że zmienną całkowania jest t , a więc możemy współczynnik stały 3 wyciągnąć przed znak całki,

(5) wynika z tego, że $\int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t^{\frac{1}{2}} + C$,

(6) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 1$ oraz $t = x + 1$ do wyniku całki; musimy również pamiętać o tym, że $t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{t}$ oraz o kolejności: "granica górna" – "granica dolna".

Przejdziemy teraz do całki zewnętrznej. Podstawiając za cały nawias wynik całki wewnętrznej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_{x+1}^{2x+1} \frac{3}{\sqrt{y-x}} dy \right) dx &= \int_0^3 (6\sqrt{x+1} - 6) dx = \int_0^3 6\sqrt{x+1} dx - \int_0^3 6 dx \\ &= 6 \int_0^3 \sqrt{x+1} dx - 6 \int_0^3 1 dx; \end{aligned} \quad (\Delta)$$

przy przekształceniach skorzystaliśmy również z faktu, że całkę różnicy możemy zapisać jako różnicę całek oraz że czynnik stały (w tym wypadku 6) można wystawić przed znak całki. Zauważmy, że drugą z całek po prawej stronie powyższego wzoru (Δ) łatwo policzyć, bowiem

$$6 \int_0^3 1 dx = 6x \Big|_{x=0}^{x=3} = 6(3-0) = 18.$$

Musimy się teraz zająć pierwszą z całek po prawej stronie wzoru (Δ). Raz jeszcze skorzystamy z całkowania przez podstawienia. Mamy

$$\begin{aligned} 6 \int_0^3 \sqrt{x+1} dx &= \left. \begin{array}{l} s = x + 1 \\ 1 \cdot ds \stackrel{(1)}{=} (1+0)dx \\ ds = dx \end{array} \right\} \stackrel{(2)}{=} 6 \int_1^4 \sqrt{s} ds \stackrel{(3)}{=} 6 \cdot \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} \Big|_{s=1}^{s=4} = 4s^{\frac{3}{2}} \Big|_{s=1}^{s=4} \\ &= 4(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) \stackrel{(4)}{=} 4(8-1) = 28, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $s = x + 1$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem s (co oznaczamy dopisując symbol ds), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
- (2) wynika z podstawienia s za wyrażenie $x + 1$ pod pierwiastek oraz zastąpienia dx przez ds ; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 0$ zamieni się na $s = 0 + 1 = 1$, a granica górna $x = 3$ zamieni się na $s = 3 + 1 = 4$),
- (3) wynika z tego, że $\int \sqrt{s} ds = \int s^{\frac{1}{2}} ds = \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + C$,
- (4) wynika z faktu, że $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$ oraz $1^{\frac{3}{2}} = 1$.

Podstawiając wyniki cząstkowe do wzoru (Δ), otrzymujemy

$$\int_0^3 \left(\int_{x+1}^{2x+1} \frac{3}{\sqrt{y-x}} dy \right) dx = 6 \int_0^3 \sqrt{x+1} dx - 6 \int_0^3 1 dx = 28 - 18 = 10.$$

(g) Zaczniemy oczywiście od obliczenia całki wewnętrznej

$$\int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx.$$

Zauważmy, że jest to całka względem zmiennej x , a zatem wszystkie y traktuje jako stałe. Gdyby np. $y = \frac{1}{2}$, to wtedy powyższa całka przyjąłaby postać

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} dx;$$

należałoby więc całkować ją przez podstawienie. To sugeruje, że i całkę

$$\int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx.$$

należy scałkować przez podstawienie. Mamy

$$\int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx = \left. \begin{array}{l} t = \frac{x}{y} \\ 1 \cdot dt \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{y} dx \\ y dt = dx \end{array} \right\} \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 e^t y dt \stackrel{(3)}{=} y \int_0^1 e^t dt \stackrel{(4)}{=} y \cdot e^t \Big|_{t=0}^{t=1} = ye^1 - ye^0 = ye - y,$$

gdzie równość

- (1) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = \frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
- (2) wynika z podstawienia t za wyrażenie $\frac{x}{y}$ w wykładniku oraz zastąpienia dx przez $y dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 0$ zamieni się na $t = \frac{0}{y} = 0$, a granica górna $x = y$ zamieni się na $t = \frac{y}{y} = 1$),
- (3) wynika z tego, że zmienną całkowania jest t , a więc możemy czynnik stały y wyciągnąć przed znak całki,
- (4) wynika z tego, że $\int e^t dt = e^t + C$.

Zatem, wracając do całki zewnętrznej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 (ye - y) dy \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 ey dy - \int_0^1 y dy \\ &\stackrel{(3)}{=} e \int_0^1 y dy - \int_0^1 y dy \stackrel{(4)}{=} e \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=1} - \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{2} e (1^2 - 0^2) - \frac{1}{2} (1^2 - 0^2) = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $ye - y$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy jest różnicą całek,
- (3) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy w pierwszej całce czynnik stały e (to jest liczba wynosząca ok. 2,7283) wyciągnąć przed znak całki,
- (4) wynika z tego, że $\int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = 1$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\int_0^1 \left(\int_0^y e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2}.$$

(h) Zaczniemy jak we wszystkich poprzednich przykładach od obliczenia całki wewnętrznej

$$\int_0^x 6e^{x+2y} dy.$$

Zauważmy, że jest to całka względem zmiennej y , a zatem wszystkie x traktuje jako stałe. Gdyby np. $x = 1$, to wtedy powyższa całka przyjąłaby postać

$$\int_0^1 6e^{1+2y} dy;$$

należałoby więc całkować ją przez podstawienie. To sugeruje, że i całkę

$$\int_0^x 6e^{x+2y} dy$$

należy scałkować przez podstawienie. Mamy

$$\int_0^x 6e^{x+2y} dy = \left. \begin{array}{l} t = x + 2y \\ 1 \cdot dt \stackrel{(1)}{=} 2dy \\ \frac{1}{2} dt = dy \end{array} \right\} \stackrel{(2)}{=} \int_x^{3x} 3e^t dt \stackrel{(3)}{=} 3 \int_x^{3x} e^t dt \stackrel{(4)}{=} 3 \cdot e^t \Big|_{t=x}^{t=3x} = 3e^{3x} - 3e^x,$$

gdzie równość

- (1) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = x + 2y$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. y (co oznaczamy dopisując symbol dy),
- (2) wynika z podstawienia t za wyrażenie $x + 2y$ w wykładniku oraz zastąpienia dy przez $\frac{1}{2}dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $y = 0$ zamieni się na $t = x + 2 \cdot 0 = x$, a granica górna $y = x$ zamieni się na $t = x + 2x = 3x$),
- (3) wynika z wyciągnięcia czynnika stałego 3 przed całkę,
- (4) wynika z tego, że $\int e^t dt = e^t + C$,
- (5) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = x$ oraz $t = 3x$ do wyniku całki.

Wróćmy teraz do całki zewnętrznej

$$\begin{aligned} \int_1^{\ln 3} \left(\int_0^x 6e^{x+2y} dy \right) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_1^{\ln 3} (3e^{3x} - 3e^x) dx \stackrel{(2)}{=} \int_1^{\ln 3} 3e^{3x} dx - \int_1^{\ln 3} 3e^x dx \\ &\stackrel{(3)}{=} 3 \int_1^{\ln 3} e^{3x} dx - 3 \int_1^{\ln 3} e^x dx \stackrel{(4)}{=} 3 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_{x=1}^{x=\ln 3} - 3e^x \Big|_{x=1}^{x=\ln 3} \\ &\stackrel{(5)}{=} (e^{3\ln 3} - e^3) - 3(e^{\ln 3} - e^1) \stackrel{(6)}{=} 18 + 3e - e^3, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $3e^{3x} - 3e^x$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy jest różnicą całek,
- (3) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc możemy w pierwszej całce czynnik stały 3 wyciągnąć przed znak całki,
- (4) wynika z tego, że $\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + C$ dla $a \neq 0$; istotnie

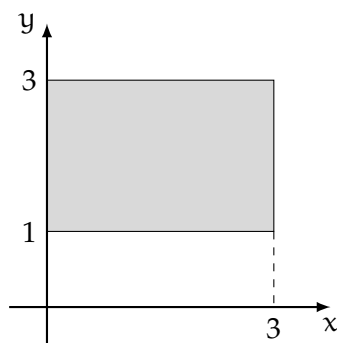
$$\int e^{at} dt = \left. \begin{array}{l} u = at \\ 1 \cdot du = a dt \\ \frac{1}{a} du = dt \end{array} \right\} = \int e^u \cdot \frac{1}{a} du = \frac{1}{a} \int e^u du = \frac{1}{a} e^u + C = \frac{1}{a} e^{at} + C,$$

- (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 1$ oraz $x = \ln 3$ do wyniku całek,
- (6) wynika z własności potęg i logarytmów: $e^{3\ln 3} = e^{\ln 3^3} = e^{\ln 27} = 27$ oraz $e^{\ln 3} = 3$.

Podsumowując

$$\int_1^{\ln 3} \left(\int_0^x 6e^{x+2y} dy \right) dx = 18 + 3e - e^3.$$

22.11 (a) Zbiór A jest prostokątem takim, że $0 \leq x \leq 3$ oraz $1 \leq y \leq 3$ (jego szkic przedstawiono na poniższym rysunku).



Korzystając z twierdzenia Fubiniego dla prostokąta mamy

$$\iint_A x^2 y \, dx dy = \int_1^3 \left(\int_0^3 x^2 y \, dx \right) dy.$$

Pozostaje nam więc teraz obliczyć całki iterowane. Zaczniemy od całki wewnętrznej. Mamy

$$\int_0^3 x^2 y \, dx \stackrel{(1)}{=} y \int_0^3 x^2 \, dx \stackrel{(2)}{=} y \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=3} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{3} y (3^3 - 0^3) = \frac{1}{3} y \cdot 27 = 9y,$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc możemy współczynnik stały y wyciągnąć przed całkę,
- (2) wynika z tego, że $\int t^2 \, dt = \frac{1}{3} t^3 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 3$ do wyniku całki.

Zatem

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y \, dx dy &= \int_1^3 \left(\int_0^3 x^2 y \, dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_1^3 9y \, dy \\ &\stackrel{(2)}{=} 9 \int_1^3 y \, dy \stackrel{(3)}{=} 9 \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=1}^{y=3} \stackrel{(4)}{=} \frac{9}{2} (3^2 - 1^2) = \frac{9}{2} (9 - 1) = 36, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $9y$,
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy czynnik stały 9 wyciągnąć przed całkę,
- (3) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,
- (4) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 1$ oraz $y = 3$ do wyniku całki.

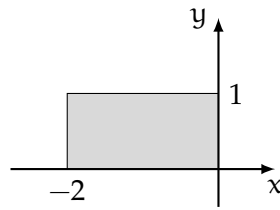
Podsumowując

$$\iint_A x^2 y \, dx dy = 36.$$

Uwaga. W powyższym zadaniu mogliśmy również skorzystać z drugiego ze wzorów w twierdzeniu Fubiniego. Mielibyśmy wtedy

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y \, dx dy &= \int_0^3 \left(\int_1^3 x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^3 \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{y=1}^{y=3} dx = \int_0^3 \frac{1}{2} x^2 (3^2 - 1^2) dx \\ &= \int_0^3 4x^2 \, dx = \frac{4}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{4}{3} \cdot (3^3 - 0^3) = \frac{4}{3} \cdot 27 = 36. \end{aligned}$$

(b) Zbiór A jest prostokątem takim, że $-2 \leq x \leq 0$ oraz $0 \leq y \leq 1$ (jego szkic przedstawiono na poniższym rysunku).



Korzystając z twierdzenia Fubiniego dla prostokąta mamy

$$\iint_A 8y^3x \, dx \, dy = \int_{-2}^0 \left(\int_0^1 8y^3x \, dy \right) dx.$$

Musimy teraz obliczyć całki iterowane. Zaczniemy od całki wewnętrznej. Mamy

$$\int_0^1 8y^3x \, dy \stackrel{(1)}{=} 8x \int_0^1 y^3 \, dy \stackrel{(2)}{=} 8x \cdot \frac{1}{4}y^4 \Big|_{y=0}^{y=1} \stackrel{(3)}{=} 2x(1^4 - 0^4) = 2x,$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy współczynnik stały $8x$ wyciągnąć przed całkę,
- (2) wynika z tego, że $\int t^3 \, dt = \frac{1}{4}t^4 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = 1$ do wyniku całki.

Zatem

$$\begin{aligned} \iint_A 8y^3x \, dx \, dy &= \int_{-2}^0 \left(\int_0^1 8y^3x \, dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-2}^0 2x \, dx \\ &\stackrel{(2)}{=} 2 \int_{-2}^0 x \, dx \stackrel{(3)}{=} 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=-2}^{x=0} \stackrel{(4)}{=} 0^2 - (-2)^2 = -4, \end{aligned}$$

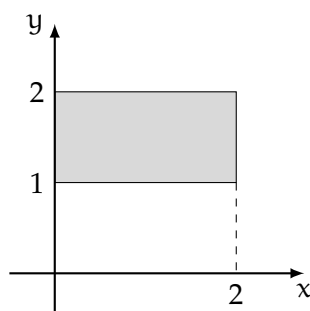
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $2x$,
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc możemy czynnik stały 2 wyciągnąć przed całkę,
- (3) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$,
- (4) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = -2$ oraz $x = 0$ do wyniku całki.

Podsumowując

$$\iint_A 8y^3x \, dx \, dy = -4.$$

(c) Zbiór A jest prostokątem takim, że $0 \leq x \leq 2$ oraz $1 \leq y \leq 2$ (jego szkic przedstawiono na poniższym rysunku).



Korzystając z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\iint_A (x - 3y^2) \, dx \, dy = \int_1^2 \left(\int_0^2 (x - 3y^2) \, dx \right) dy.$$

A teraz przechodzimy do obliczenia wewnętrznej całki iterowanej. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x - 3y^2) \, dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^2 x \, dx - \int_0^2 3y^2 \, dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^2 x \, dx - 3y^2 \int_0^2 1 \, dx \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=2} - 3y^2 \cdot x \Big|_{x=0}^{x=2} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 0^2) - 3y^2(2 - 0) = 2 - 6y^2, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z faktu, że możemy rozbić (rozpisać) całkę różnicy jako różnicę całek,
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc możemy w drugiej całce czynnik stały $3y^2$ wyciągnąć przed znak całki,
- (3) wynika z tego, że $\int 1 \, dt = t + C$ oraz $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,
- (4) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 2$ do wyniku całek.

Zatem

$$\begin{aligned} \iint_A (x - 3y^2) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_0^2 (x - 3y^2) \, dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_1^2 (2 - 6y^2) \, dy \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_1^2 2 \, dy - \int_1^2 6y^2 \, dy \stackrel{(3)}{=} 2 \int_1^2 1 \, dy - 6 \int_1^2 y^2 \, dy \\ &\stackrel{(4)}{=} 2 \cdot y \Big|_{y=1}^{y=2} - 6 \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=1}^{y=2} \stackrel{(5)}{=} 2(2 - 1) - 2(2^3 - 1^3) = 2 - 2 \cdot 7 = -12, \end{aligned}$$

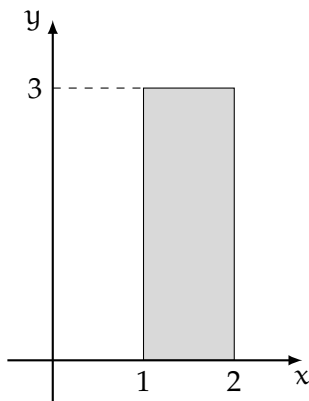
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $2 - 6y^2$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy, to różnica całek,
- (3) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy czynniki stałe (2 dla całki pierwszej i $6y^2$ dla całki drugiej) wyciągnąć przed całkę,
- (4) wynika z tego, że $\int 1 \, dt = t + C$ oraz $\int t^2 \, dt = \frac{1}{3} t^3 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 1$ oraz $y = 2$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\iint_A (x - 3y^2) \, dx \, dy = -12.$$

(d) Zbiór A jest prostokątem takim, że $1 \leq x \leq 2$ oraz $0 \leq y \leq 3$ (jego szkic przedstawiono na poniższym rysunku).



Korzystając z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\iint_A (6x^2y - 2y) \, dx \, dy = \int_0^3 \left(\int_1^2 (6x^2y - 2y) \, dx \right) dy.$$

Musimy teraz obliczyć całki iterowane. Zaczniemy od całki wewnętrznej. Mamy

$$\begin{aligned} \int_1^2 (6x^2y - 2y) \, dx &\stackrel{(1)}{=} \int_1^2 6x^2y \, dx - \int_1^2 2y \, dx \stackrel{(2)}{=} 6y \int_1^2 x^2 \, dx - 2y \int_1^2 1 \, dx \\ &\stackrel{(3)}{=} 6y \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=1}^{x=2} - 2y \cdot x \Big|_{x=1}^{x=2} \stackrel{(3)}{=} 2y \cdot (2^3 - 1^3) - 2y(2 - 1) = 14y - 2y = 12y, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z faktu, że możemy rozbić (rozpisać) całkę różnicy jako różnicę całek,
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a więc możemy czynniki stałe (odpowiednio $6y$ i $2y$) wyciągnąć przed znak całki,
- (3) wynika z tego, że $\int 1 \, dt = t + C$ oraz $\int t^2 \, dt = \frac{1}{3}t^3 + C$,
- (4) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 1$ oraz $x = 2$ do wyniku całek.

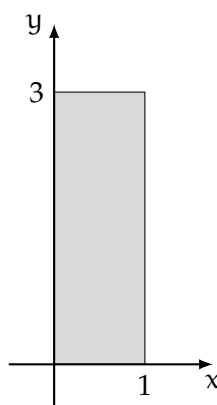
Zatem

$$\begin{aligned} \iint_A (6x^2y - 2y) \, dx \, dy &= \int_0^3 \left(\int_1^2 (6x^2y - 2y) \, dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^3 12y \, dy \stackrel{(2)}{=} 12 \int_0^3 y \, dy \\ &\stackrel{(3)}{=} 12 \cdot \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=3} \stackrel{(4)}{=} 6(3^2 - 0^2) = 54, \end{aligned}$$

Podsumowując

$$\iint_A (6x^2y - 2y) \, dx \, dy = 54.$$

(e) Zbiór A jest prostokątem takim, że $0 \leq x \leq 1$ oraz $0 \leq y \leq 3$ (jego szkic przedstawiono na poniższym rysunku).



Korzystając z twierdzenia Fubiniego otrzymujemy

$$\iint_A \frac{xy^2}{x^2 + 1} \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^3 \frac{xy^2}{x^2 + 1} \, dy \right) dx.$$

Pozostaje nam teraz obliczyć całki iterowane. Jak zawsze, zaczniemy od całki wewnętrznej. Mamy

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{xy^2}{x^2+1} dy &= \int_0^3 \frac{x}{x^2+1} \cdot y^2 dy \stackrel{(1)}{=} \frac{x}{x^2+1} \cdot \int_0^3 y^2 dy \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=0}^{y=3} \stackrel{(3)}{=} \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 0^3) \\ &= \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{3} \cdot 27 = \frac{9x}{x^2+1},\end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a więc możemy czynnik stały, który tutaj wynosi $\frac{x}{x^2+1}$, wyciągnąć przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = 3$ do wyniku całki.

Zatem

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{xy^2}{x^2+1} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^3 \frac{xy^2}{x^2+1} dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \frac{9x}{x^2+1} dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 \frac{1}{2x} dt \stackrel{(3)}{=} \int_0^1 (2x+0) dx \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_1^2 \frac{9x}{t} \cdot \frac{1}{2x} dt \stackrel{(5)}{=} \frac{9}{2} \int_1^2 \frac{1}{t} dt \stackrel{(6)}{=} \frac{9}{2} \cdot \ln|t| \Big|_{t=1}^{t=2} \stackrel{(7)}{=} \frac{9}{2} \cdot (\ln 2 - \ln 1) = \frac{9}{2} \ln 2,\end{aligned}$$

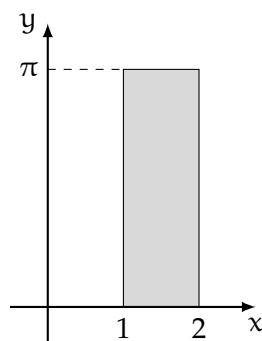
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $\frac{9x}{x^2+1}$,
- (2) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawimy $t = x^2 + 1$),
- (3) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = x^2 + 1$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
- (4) wynika z obustronnego podzielenia wyrażenia $dt = 2x dx$ przez $2x$,
- (5) wynika z podstawienia t za wyrażenie $x^2 + 1$ do mianownika ułamka $\frac{9x}{x^2+1}$ (licznik pozostawiamy na razie bez zmian) oraz zastąpienia dx przez $\frac{1}{2x} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 0$ zamieni się na $t = 0^2 + 1 = 1$, a granica górna $x = 1$ zamieni się na $t = 1^2 + 1 = 2$),
- (6) wynika ze skrócenia zmiennej x w liczniku ułamka $\frac{9x}{t}$ i mianowniku ułamka $\frac{1}{2x}$; możemy również czynnik stały $\frac{9}{2}$ wyciągnąć przed znak całki,
- (7) wynika z tego, że $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$,
- (8) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 1$ oraz $t = 2$ do wyniku całek (pamiętajmy, że $\ln 1 = 0$).

Podsumowując

$$\iint_A \frac{xy^2}{x^2+1} dx dy = \frac{9}{2} \ln 2.$$

(f) Zbiór A jest prostokątem takim, że $1 \leq x \leq 2$ oraz $0 \leq y \leq \pi$ (jego szkic przedstawiono na poniższym rysunku).



Korzystając z twierdzenia Fubiniego, możemy całkę podwójną $\iint_A y \cos(xy) \, dx dy$ zapisać jako całki iterowane na dwa sposoby

$$\iint_A y \cos(xy) \, dx dy = \int_1^2 \left(\int_0^\pi y \cos(xy) \, dy \right) dx$$

lub

$$\iint_A y \cos(xy) \, dx dy = \int_0^\pi \left(\int_1^2 y \cos(xy) \, dx \right) dy.$$

Najtrudniejszą częścią tego zadania będzie wybranie, które z powyższych “rozpisań”, pozwoli nam uniknąć skomplikowanych rachunków. Porównajmy całki wewnętrzne:

$$\int_0^\pi y \cos(xy) \, dy \quad \text{vs.} \quad \int_1^2 y \cos(xy) \, dx.$$

Zauważmy, że w całce po lewej stronie zmienną całkowania jest y , a więc x możemy traktować jako stałe (np. nadając im wartość $x = 1$). W całce po stronie prawej sytuacja jest odwrotna; teraz x jest zmienną całkowania, a y możemy traktować jako stałe (np. nadając im wartość $y = 2$). Przyjmując więc $x = 1$ w całce “lewej” oraz $y = 2$ w całce “prawej” otrzymamy

$$\int_0^\pi y \cos y \, dy \quad \text{vs.} \quad \int_1^2 2 \cos(2x) \, dx.$$

Którą z tych dwóch całek łatwiej obliczyć? I jak to zrobić? Okazuje się, że obliczenie całki po stronie lewej wymaga wykorzystania wzoru na całkowanie przez części. Całkę po stronie prawej można całkować korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie (który zazwyczaj jest łatwiejszy niż wzór na całkowanie przez części). Dlatego też łatwiej nam będzie wybrać “ścieżkę prawą”, tzn. zacząć od całki $\int_1^2 y \cos(xy) \, dx$ jako całki wewnętrznej.

Z powyższych rozważań wynika, że korzystając z twierdzenia Fubiniego i rozpisując całkę podwójną $\iint_A y \cos(xy) \, dx dy$ na całki iterowane zrobimy to w sposób następujący:

$$\iint_A y \cos(xy) \, dx dy = \int_0^\pi \left(\int_1^2 y \cos(xy) \, dx \right) dy.$$

(Oczywiście, gdyby ktoś wybrał drugie podejście, to też otrzyma na końcu poprawny wynik, jednak same obliczenia mogą być trudniejsze.) Zatem

$$\begin{aligned} \int_1^2 y \cos(xy) \, dx &\stackrel{(1)}{=} \int_1^2 1 \cdot dt \stackrel{(2)}{=} \int_1^2 1 \cdot y \cdot dx \stackrel{(4)}{=} \int_y^{2y} y \cos(t) \cdot \frac{1}{y} dt \stackrel{(5)}{=} \int_y^{2y} \cos(t) \, dt \\ &\stackrel{(6)}{=} \sin(t) \Big|_{t=y}^{t=2y} \stackrel{(7)}{=} \sin(2y) - \sin(y), \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawimy $t = xy$),
- (2) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = xy$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
- (3) wynika z obustronnego podzielenia wyrażenia $dt = y dx$ przez y ,
- (4) wynika z podstawienia t za wyrażenie xy w $\cos(xy)$ oraz zastąpienia dx przez $\frac{1}{y} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 1$ zamieni się na $t = 1 \cdot y = y$, a granica górna $x = 2$ zamieni się na $t = 2 \cdot y = 2y$),
- (5) wynika ze skrócenia zmiennej y ,
- (6) wynika z tego, że $\int \cos(t) dt = -\sin(t) + C$,
- (7) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = y$ oraz $t = 2y$ do wyniku całek.

A teraz przejdziemy do obliczenia całki zewnętrznej (co da nam już wynik całki podwójnej). Mamy

$$\begin{aligned}
 \iint_A y \cos(xy) dx dy &= \int_0^\pi \left(\int_1^2 y \cos(xy) dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^\pi [\sin(2y) - \sin(y)] dy \\
 &\stackrel{(2)}{=} \int_0^\pi \sin(2y) dy - \int_0^\pi \sin(y) dy \stackrel{(3)}{=} -\frac{1}{2} \cos(2y) \Big|_{y=0}^{y=\pi} - [-\cos(y)] \Big|_{y=0}^{y=\pi} \\
 &\stackrel{(4)}{=} -\frac{1}{2} [\cos(2\pi) - \cos 0] + (\cos \pi - \cos 0) \\
 &\stackrel{(5)}{=} -\frac{1}{2} (1 - 1) + (-1 - 1) = -2.
 \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $\sin(2y) - \sin(y)$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy to różnica całek,
- (3) wynika z tego, że $\int \sin t dt = -\cos t + C$ oraz $\int \sin(2t) dt = -\frac{1}{2} \cos(2t) + C$; istotnie

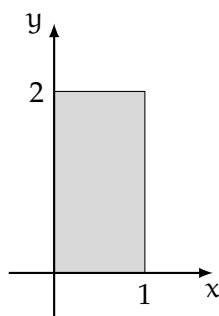
$$\begin{aligned}
 \int \sin(2t) dt &= \left. \begin{array}{l} u = 2t \\ du = 2dt \\ \frac{1}{2} du = dt \end{array} \right\} = \int \cos u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int \cos u du \\
 &= -\frac{1}{2} \sin u + C = -\frac{1}{2} \sin(2t) + C,
 \end{aligned}$$

- (4) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = \pi$ do wyniku całek,
- (5) wynika z tego, że $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$ oraz $\cos 2\pi = 1$.

Podsumowując

$$\iint_A y \cos(xy) dx dy = -2.$$

(g) Zbiór A jest prostokątem takim, że $0 \leq x \leq 2$ oraz $0 \leq y \leq 2$ (jego szkic przedstawiono na poniższym rysunku).



Tak jak w poprzednich przykładach, musimy zacząć od przedstawiania całki podwójnej jako całki iterowane. Mamy dwie możliwości

$$\iint_A xy e^{x^2 y} dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 xy e^{x^2 y} dx \right) dy,$$

albo

$$\iint_A xy e^{x^2 y} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 xy e^{x^2 y} dy \right) dx.$$

By zdecydować, które z powyższych “rozpisań” wybrać (oba są poprawne, ale jedno będzie prowadzić do prostszych rachunków, a drugie do tych bardziej wymagających), porównajmy całki wewnętrzne:

$$\int_0^1 xy e^{x^2 y} dx \quad \text{vs.} \quad \int_0^2 xy e^{x^2 y} dy.$$

W całce po lewej stronie zmienną całkowania jest x , a y traktujemy jako stałą (np. $y = 2$). W całce po prawej stronie jest odwrotnie, tzn. y jest zmienną całkowania, a x traktujemy jako stałą (np. $x = 1$). Przy takim podejściu powyższe całki przyjmują następującą postać

$$\int_0^1 2xe^{2x^2} dx \quad \text{vs.} \quad \int_0^2 ye^y dy.$$

Okazuje się, że by obliczyć całkę po lewej stronie należy korzystać z metody całkowania przez podstawienie. Całkę po stronie prawej należy z kolei liczyć metodą całkowania przez części. Ponieważ zazwyczaj całkowanie przez podstawienie jest łatwiejsze do wykonania, dlatego też wybierzemy “opcję lewą”. Zatem nasze “rozpisanie” całki podwójnej na całki iterowane będzie wyglądać tak

$$\iint_A xy e^{x^2 y} dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 xy e^{x^2 y} dx \right) dy.$$

(Podkreślmy raz jeszcze, że *oba* “rozpisanie” całki podwójnej na całki iterowane – to które wybraliśmy, jak i to drugie – są poprawne matematycznie. Jedno z nich prowadzi jednak do prostszych rachunków.)

Przejdziemy teraz do obliczenia całki wewnętrznej. Jak już powiedzieliśmy, skorzystamy z metody całkowania przez podstawienie. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^1 xy e^{x^2 y} dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 1 \cdot dt \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 2xy \cdot dx \stackrel{(4)}{=} \int_0^y xy e^t \frac{1}{2xy} dt \stackrel{(5)}{=} \int_0^y \frac{1}{2} e^t dt \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{1}{2} \int_0^y e^t dt \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{2} e^t \Big|_{t=0}^{t=y} \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{2} e^y - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawimy $t = x^2y$),
- (2) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = x^2y$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
- (3) wynika z obustronnego podzielenia wyrażenia $dt = 2xy \, dx$ przez $2xy$,
- (4) wynika z podstawienia t za wyrażenie x^2y w e^{x^2y} (na razie nie ruszamy xy stojącego przed e^{x^2y}) oraz zastąpienia dx przez $\frac{1}{2xy} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 0$ zamieni się na $t = 0^2 \cdot y = 0$, a granica górna $x = 1$ zamieni się na $t = 1^2 \cdot y = y$),
- (5) wynika ze skrócenia wyrażenia $2xy$,
- (6) wynika z wyciągnięcia przed znak całki czynnika stałego $\frac{1}{2}$,
- (7) wynika z tego, że $\int e^t dt = e^t + C$,
- (8) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 0$ oraz $t = y$ do wyniku całek.

Wracamy teraz do obliczenia całki zewnętrznej (co da nam już wynik całki podwójnej). Mamy

$$\begin{aligned}
 \iint_A xy e^{x^2y} \, dx dy &= \int_0^2 \left(\int_0^1 xy e^{x^2y} \, dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^2 \left(\frac{1}{2} e^y - \frac{1}{2} \right) dy \\
 &\stackrel{(2)}{=} \int_0^2 \frac{1}{2} e^y \, dy - \int_0^2 \frac{1}{2} \, dy \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \int_0^2 e^y \, dy - \frac{1}{2} \int_0^2 1 \, dy \\
 &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} e^y \Big|_{y=0}^{y=2} - \frac{1}{2} y \Big|_{y=0}^{y=2} \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2} (e^2 - e^0) - \frac{1}{2} (2 - 0) \\
 &\stackrel{(6)}{=} \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2},
 \end{aligned}$$

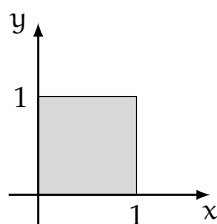
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $\frac{1}{2} e^y - \frac{1}{2}$,
- (2) wynika z rozbicia całki różnicy na różnicę dwóch całek,
- (3) wynika z tego, że możemy czynnik stały $\frac{1}{2}$ wyciągnąć przed znak zarówno jednej jak i drugiej całki,
- (4) wynika z tego, że $\int e^t dt = e^t + C$ oraz $\int 1 dt = t + C$,
- (5) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = 2$ do wyniku całek (pamiętajmy o kolejności: "granica górna" – "granica dolna"),
- (6) wynika z tego, że $e^0 = 1$.

Podsumowując

$$\iint_A xy e^{x^2y} \, dx dy = \frac{1}{2} e^2 - \frac{3}{2}.$$

(h) Zbiór A jest prostokątem takim, że $0 \leq x \leq 1$ oraz $0 \leq y \leq 1$ (jego szkic przedstawiono na poniższym rysunku).



Naszym celem jest teraz przedstawianie całki podwójnej jako całki iterowane. Mamy dwie możliwości

$$\iint_A \frac{x}{1+xy} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dx \right) dy,$$

albo

$$\iint_A \frac{x}{1+xy} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy \right) dx.$$

By zdecydować, które z powyższych "rozpisań" wybrać (oba są poprawne, ale jedno będzie prowadzić do prostszych rachunków, a drugie do tych bardziej wymagających), porównajmy całki wewnętrzne:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dx \quad \text{vs.} \quad \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy.$$

W całce po lewej stronie zmienną całkowania jest x , a y traktujemy jako stałą (np. $y = 2$). W całce po prawej stronie jest odwrotnie, tzn. y jest zmienną całkowania, a x traktujemy jako stałą (np. $x = 3$). Przy takim podejściu powyższe całki przyjmują następującą postać

$$\int_0^1 \frac{x}{1+2x} dx \quad \text{vs.} \quad \int_0^1 \frac{3}{1+3y} dy.$$

Całka po prawej stronie jest „prostą” całką, którą można obliczyć korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie, podczas gdy całka po stronie lewej jest całką wymierną. By ją obliczyć musieliśmy najpierw rozłożyć funkcję wymierną $\frac{x}{1+2x}$ na sumę wielomianu oraz ułamków prostych, co będzie bardziej pracochłonne niż całkowanie przez podstawienie. Zatem nasze „rozpisanie” całki podwójnej na całki iterowa będzie wyglądać tak

$$\iint_A \frac{x}{1+xy} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy \right) dx.$$

Przejdziemy teraz do obliczenia całki wewnętrznej. Skorzystamy z metody całkowania przez podstawienie. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \frac{x}{t} \cdot \frac{1}{x} dt \stackrel{(2)}{=} \int_1^{1+x} \frac{1}{t} dt \stackrel{(3)}{=} \ln|t| \Big|_{t=1}^{t=1+x} \stackrel{(4)}{=} \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x), \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawimy $t = 1 + xy$),
- (2) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = 1 + xy$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. y (co oznaczamy dopisując symbol dy),
- (3) wynika z obustronnego podzielenia wyrażenia $dt = x dy$ przez x ,
- (4) wynika z podstawienia t za wyrażenie $1 + xy$ w $\frac{x}{1+xy}$ (na razie nie ruszamy x stojącego w liczniku) oraz zastąpienia dy przez $\frac{1}{x} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $y = 0$ zamieni się na $t = 1 + x \cdot 0 = 1$, a granica górna $y = 1$ zamieni się na $t = 1 + x \cdot 1 = 1 + x$),

- (5) wynika ze skrócenia wyrażenia x ,
 (6) wynika z tego, że $\int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C$,
 (7) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 1$ oraz $t = 1 + x$ do wyniku całek oraz zauważenia, że $1 + x > 0$, bo $x \in [0, 1]$.

Wracamy teraz do obliczenia całki zewnętrznej. Mamy

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{x}{1+xy} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x}{1+xy} dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \ln(1+x) dx \stackrel{(2)}{=} \left. \begin{array}{l} u = 1+x \\ 1 \cdot du \stackrel{(3)}{=} dx \\ du = dx \end{array} \right\} \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_1^2 \ln u du \stackrel{(5)}{=} \int_1^2 1 \cdot \ln u du = \left. \begin{array}{ll} f(u) = \ln u & f'(u) = \frac{1}{u} \\ g'(u) = 1 & g(u) = u \end{array} \right\} \\ &\stackrel{(6)}{=} u \ln u \Big|_{u=1}^{u=2} - \int_1^2 \frac{1}{u} \cdot u du \stackrel{(7)}{=} 2 \ln 2 - 1 \ln 1 - \int_1^2 1 du \\ &\stackrel{(8)}{=} 2 \ln 2 - u \Big|_{u=1}^{u=2} = 2 \ln 2 - (2 - 1) = 2 \ln 2 - 1, \end{aligned}$$

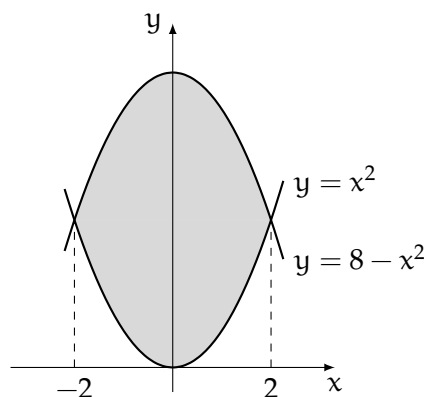
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $\ln(1+x)$,
 (2) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawimy $u = 1+x$),
 (3) item wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $u = 1+x$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem u (co oznaczamy dopisując symbol du), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
 (4) wynika z podstawienia u za wyrażenie $1+x$ w $\ln(1+x)$ oraz zastąpienia dx przez du ; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 0$ zamieni się na $u = 1+0 = 1$, a granica górna $x = 1$ zamieni się na $u = 1+1 = 2$),
 (5) wynika z tego, że będziemy korzystać teraz ze wzoru na całkowanie przez części,
 (6) wynika z zastosowania wzoru na całkowanie przez części: $\int f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t) dt$,
 (7) wynika z podstawienia w odjemnej za u granic całkowania $u = 1$ oraz $u = 2$, a także skróceniu wyrażeń $\frac{1}{u}$ i u w odjemniku,
 (8) wynika z tego, że $\ln 1 = 0$ oraz $\int 1 dt = t + C$,
 (9) wynika z podstawienia za u granic całkowania $u = 1$ oraz $u = 2$ do wyniku całki.

Podsumowując

$$\iint_A \frac{x}{1+xy} dx dy = 2 \ln 2 - 1.$$

22.12 (a) Obliczanie całek podwójnych po obszarach innych niż prostokąty, dobrze jest zawsze zacząć od narysowania obszaru, po którym będziemy całkować (szkic obszaru A przedstawiono na poniższym rysunku).



By opisać zbiór A za pomocą nierówności, wyznaczmy punkty przecięcia krzywych $y = x^2$ oraz $y = 8 - x^2$. Porównując lewe strony danych równań, otrzymujemy $x^2 = 8 - x^2$, tj. $2x^2 - 8 = 0$ lub $x^2 - 4 = 0$. Korzystając teraz ze wzoru skróconego mnożenia, dostajemy $(x - 2)(x + 2) = 0$, co w konsekwencji daje $x_1 = -2$ lub $x_2 = 2$. Zatem zbiór A możemy opisać następująco $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2 \text{ oraz } x^2 \leq y \leq 8 - x^2\}$.

Korzystając teraz z twierdzenia Fubiniego dla obszarów normalnych mamy

$$\iint_A 2 \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \left(\int_{x^2}^{8-x^2} 2 \, dy \right) dx.$$

Musimy pamiętać, że całka zewnętrzna musi zawsze mieć granice liczbowe; granice całki wewnętrznej mogą być zmienne. Pamiętając o tej zasadzie, rozpisywanie całki podwójnej na całki iterowane w przypadku obszarów, które nie są prostokątami, nie powinno stanowić trudności. Teraz pozostaje już tylko wyliczyć całki iterowane. Zaczynamy od całki wewnętrznej. Mamy

$$\int_{x^2}^{8-x^2} 2 \, dy \stackrel{(1)}{=} 2 \int_{x^2}^{8-x^2} 1 \, dy \stackrel{(2)}{=} 2y \Big|_{y=x^2}^{y=8-x^2} \stackrel{(3)}{=} 2(8 - x^2) - 2x^2 = 16 - 4x^2.$$

gdzie równość

- (1) wynika z wyciągnięcia czynnika stałego (tj. 2) przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int 1 \, dt = t + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = x^2$ oraz $y = 8 - x^2$ do wyniku całek.

Zatem

$$\begin{aligned} \iint_A 2 \, dx \, dy &= \int_{-2}^2 \left(\int_{x^2}^{8-x^2} 2 \, dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-2}^2 (16 - 4x^2) \, dx \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{-2}^2 16 \, dx - \int_{-2}^2 4x^2 \, dx \stackrel{(3)}{=} 16 \int_{-2}^2 1 \, dx - 4 \int_{-2}^2 x^2 \, dx \\ &\stackrel{(4)}{=} 16x \Big|_{x=-2}^{x=2} - 4 \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{x=-2}^{x=2} \stackrel{(5)}{=} 16[2 - (-2)] - \frac{4}{3}[2^3 - (-2)^3] \\ &= 16 \cdot 4 - \frac{4}{3}(8 + 8) = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}, \end{aligned}$$

gdzie równość

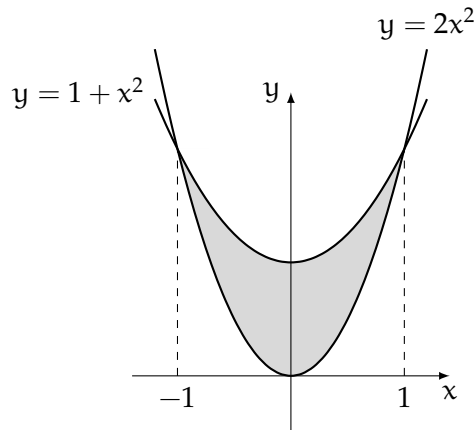
- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $16 - 4x^2$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy to różnica całek,

- (3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. 16 w przypadku pierwszej całki i 4 w przypadku drugiej) wyłączyć przed znak całki,
 (4) wynika z tego, że $\int 1 dt = t + C$ oraz $\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$,
 (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = -2$ oraz $x = 2$ do wyniku całki.

Podsumowując

$$\iint_A 2 dx dy = \frac{128}{3}.$$

(b) Podobnie jak poprzednio zaczniemy od narysowania oraz opisu zbioru A .



Wyznamy punkty przecięcia krzywych $y = 2x^2$ oraz $y = 1 + x^2$. Porównując lewe strony tych równań, otrzymujemy $2x^2 = 1 + x^2$, czyli $x^2 - 1 = 0$. Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia, dostajemy $(x - 1)(x + 1) = 0$. A zatem krzywe $y = 2x^2$ oraz $y = 1 + x^2$ przecinają się w punktach, których odcięte są równe $x_1 = -1$ lub $x_2 = 1$. Zatem zbiór A możemy opisać następująco $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ oraz } 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$.

Korzystając z twierdzenia Fubiniiego mamy wtedy

$$\iint_A 4x dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{2x^2}^{1+x^2} 4x dy \right) dx.$$

(Podobnie jak poprzednio musimy pamiętać, by granice całki zewnętrznej były liczbami.) Musimy teraz obliczyć całki iterowane. Zaczniemy od całki wewnętrznej. Mamy

$$\int_{2x^2}^{1+x^2} 4x dy \stackrel{(1)}{=} 4x \cdot \int_{2x^2}^{1+x^2} 1 dy \stackrel{(2)}{=} 4x \cdot y \Big|_{y=2x^2}^{y=1+x^2} \stackrel{(3)}{=} 4x(1 + x^2 - 2x^2) = 4x - 4x^3,$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a zatem możemy wyciągnąć czynnik stały (tj. $4x$) przed znak całki,
 (2) wynika z tego, że $\int 1 dt = t + C$,
 (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 2x^2$ oraz $y = 1 + x^2$ do wyniku całki.

Wracając do całki zewnętrznej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_A 4x dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{2x^2}^{1+x^2} 4x dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-1}^1 (4x - 4x^3) dx \stackrel{(2)}{=} \int_{-1}^1 4x dx - \int_{-1}^1 4x^3 dx \\ &\stackrel{(3)}{=} 4 \int_{-1}^1 x dx - 4 \int_{-1}^1 x^3 dx \stackrel{(4)}{=} 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=-1}^{x=1} - 4 \cdot \frac{1}{4} x^4 \Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &= 2x^2 \Big|_{x=-1}^{x=1} - x^4 \Big|_{x=-1}^{x=1} \stackrel{(5)}{=} 2[1^2 - (-1)^2] - [1^4 - (-1)^4] = 0, \end{aligned}$$

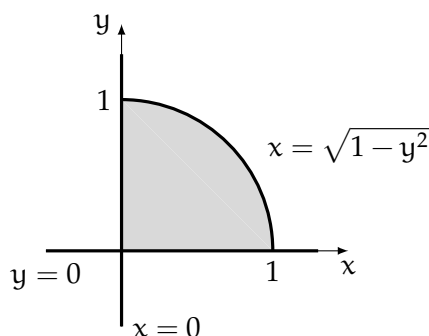
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $4x - 4x^3$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy to różnica całek,
- (3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. 4) wyłączyć przed znak całki,
- (4) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$ oraz $\int t^3 \, dt = \frac{1}{4}t^4 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = -1$ oraz $x = 1$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\iint_A 4x \, dx \, dy = 0.$$

(c) Zaczniemy od narysowania oraz opisanego zbioru A .



Aby zauważyć, że wykresem krzywej $x = \sqrt{1-y^2}$ jest ćwiartka okręgu o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 1, należy podnieść obustronnie to wyrażenie do kwadratu. Wtedy otrzymamy $x^2 = 1 - y^2$ i w konsekwencji $x^2 + y^2 = 1$. Ostatnie równanie (tj. $x^2 + y^2 = 1$) jest właśnie równaniem¹ okręgu o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu 1. Możemy zatem zbiór A opisać następująco

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \text{ oraz } 0 \leq y \leq 1\}.$$

(Zauważmy, że tym razem to zmienna y zmienia się “od liczby do liczby”, a zmienna x ma granice, które są funkcjami.) Korzystając z twierdzenia Fubiniego mamy więc

$$\iint_A 30xy^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 30xy^2 \, dx \right) dy.$$

(Podobnie jak poprzednio musimy pamiętać, by granice całki zewnętrznej były liczbami.) Musimy teraz obliczyć całki iterowane. Zaczniemy od całki wewnętrznej. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 30xy^2 \, dx &\stackrel{(1)}{=} 30y^2 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx \stackrel{(2)}{=} 30y^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}} \\ &\stackrel{(3)}{=} 15y^2 \cdot (\sqrt{1-y^2})^2 - 15y^2 \cdot 0^2 = 15y^2(1-y^2) = 15y^2 - 15y^4, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a zatem możemy wyciągnąć czynnik stały (tj. $30y^2$) przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = \sqrt{1-y^2}$ do wyniku całki (należy pamiętać o kolejności podstawiania granic: “granica górna” – “granica dolna” oraz o tym, że $(\sqrt{t})^2 = t$).

¹Dla przypomnienia, okrąg o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu r ma równanie $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$.

Wracając do całki zewnętrznej, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\iint_A 30xy^2 \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} 30xy^2 \, dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 (15y^2 - 15y^4) \, dy \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_0^1 15y^2 \, dy - \int_0^1 15y^4 \, dy \stackrel{(3)}{=} 15 \int_0^1 y^2 \, dy - 15 \int_0^1 y^4 \, dy \\ &\stackrel{(4)}{=} 15 \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=0}^{y=1} - 15 \cdot \frac{1}{5} y^5 \Big|_{y=0}^{y=1} \stackrel{(5)}{=} 5(1^3 - 0^3) - 3(1^5 - 0^5) = 5 - 3 = 2,\end{aligned}$$

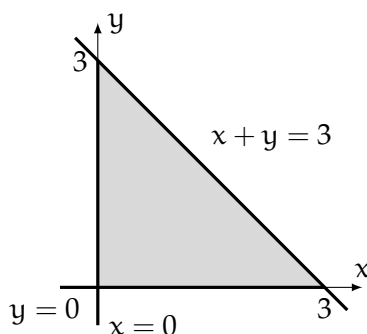
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $15y^2 - 15y^4$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy to różnica całek,
- (3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. 15) wyłączyć przed znaki całek,
- (4) wynika z tego, że $\int t^2 \, dt = \frac{1}{3}t^3 + C$ oraz $\int t^4 \, dt = \frac{1}{5}t^5 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = 1$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\iint_A 30xy^2 \, dx dy = 2.$$

(d) Rozwiązanie zaczniemy od narysowania oraz opisu zbioru A .



Zauważmy, że zbiór A możemy opisać na dwa sposoby:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \text{ oraz } 0 \leq y \leq 3 - x \right\}$$

jak również

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 - y \text{ oraz } 0 \leq y \leq 3 \right\}.$$

My w naszych rachunkach wykorzystamy drugi z nich. (Zachęcamy do samodzielnego sprawdzenia, iż, wykorzystując pierwszy z opisów zbioru A , otrzymamy taki sam wynik końcowy.)

Korzystając z twierdzenia Fubiniego mamy więc

$$\iint_A (x + y) \, dx dy = \int_0^3 \left(\int_0^{3-y} (x + y) \, dx \right) dy.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
 \int_0^{3-y} (x+y) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^{3-y} x dx + \int_0^{3-y} y dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^{3-y} x dx + y \int_0^{3-y} 1 dx \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=3-y} + y \cdot x \Big|_{x=0}^{x=3-y} \\
 &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} (3-y)^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 + y \cdot (3-y-0) \\
 &= \frac{1}{2} (9-6y+y^2) - 0 + 3y - y^2 \\
 &= \frac{9}{2} - 3y + \frac{1}{2} y^2 + 3y - y^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} y^2,
 \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że całka sumy jest sumą całek, tj. $\int (x+y) dx = \int x dx + \int y dx$,
- (2) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a zatem w drugiej z całek możemy wyciągnąć czynnik stały (tj. y) przed znak całki,
- (3) wynika z tego, że $\int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C$ oraz $\int 1 dt = t + C$,
- (4) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 3 - y$ do wyniku całek.

Przejdźmy teraz do całki zewnętrznej (a zarazem i podwójnej)

$$\begin{aligned}
 \iint_A (x+y) dx dy &= \int_0^3 \left(\int_0^{3-y} (x+y) dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^3 \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} y^2 \right) dy \\
 &\stackrel{(2)}{=} \int_0^3 \frac{9}{2} dy - \int_0^3 \frac{1}{2} y^2 dy \stackrel{(3)}{=} \frac{9}{2} \int_0^3 1 dy - \frac{1}{2} \int_0^3 y^2 dy \\
 &\stackrel{(4)}{=} \frac{9}{2} \cdot y \Big|_{y=0}^{y=3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=0}^{y=3} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \frac{9}{2} (3-0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 0^3) \\
 &= \frac{27}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 27 = \frac{27}{2} - \frac{9}{2} = \frac{18}{2} = 9,
 \end{aligned}$$

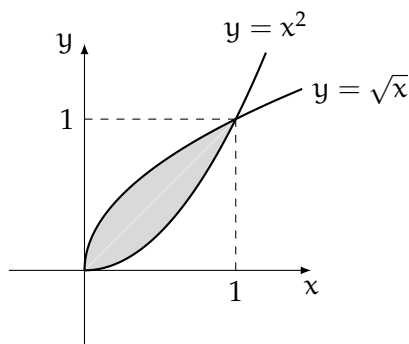
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} y^2$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy to różnica całek,
- (3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. $\frac{9}{2}$ w przypadku pierwszej całki oraz $\frac{1}{2}$ w przypadku drugiej całki) wyłączyć przed znaki całek,
- (4) wynika z tego, że $\int 1 dt = t + C$ oraz $\int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = 3$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\iint_A (x+y) dx dy = 9.$$

(e) Zanim narysujemy obszar A , wyznaczmy punkty przecięcia krzywych $y = \sqrt{x}$ oraz $y = x^2$. W tym celu porównujemy prawe strony równań krzywych i otrzymujemy $\sqrt{x} = x^2$. Podnosząc do kwadratu obustronnie, mamy $x = (x^2)^2$, czyli $x = x^4$. Zatem $x - x^4 = 0$, tzn. $x(1 - x^3) = 0$. Otrzymujemy zatem dwa punkty przecięcia, których odcięte są równe $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 1$.



Możemy zatem zbiór A opisać następująco

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ oraz } x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Korzystając z twierdzenia Fubiniego mamy więc

$$\iint_A 10y \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 10y \, dy \right) dx.$$

(Pamiętajmy, by granice całki zewnętrznej były liczbami.) Przejdziemy teraz do obliczenia całki wewnętrznej. Mamy

$$\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 10y \, dy \stackrel{(1)}{=} 10 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy \stackrel{(2)}{=} 10 \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} \stackrel{(3)}{=} 5(\sqrt{x})^2 - 5(x^2)^2 = 5x - 5x^4,$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a zatem możemy czynnik stały 10 wyciągnąć przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = x^2$ oraz $y = \sqrt{x}$ do wyniku całki (należy pamiętać o kolejności podstawiania granic: "granica górna" – "granica dolna" oraz o tym, że $(\sqrt{t})^2 = t$).

A zatem, wracając do całki zewnętrznej, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iint_A 10y \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 10y \, dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 (5x - 5x^4) \, dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 5x \, dx - \int_0^1 5x^4 \, dx \\ &\stackrel{(3)}{=} 5 \int_0^1 x \, dx - 5 \int_0^1 x^4 \, dx \stackrel{(4)}{=} 5 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} - 5 \cdot \frac{1}{5} x^5 \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{5}{2} (1^2 - 0^2) - (1^5 - 0^5) = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

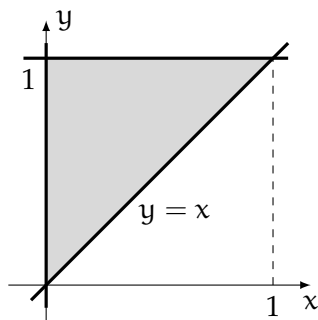
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $5x - 5x^4$,
- (2) wynika z faktu, że całka różnicy to różnica całek,
- (3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. 5) wyłączyć przed znaki całek,
- (4) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$ oraz $\int t^4 \, dt = \frac{1}{5} t^5 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 1$ do wyniku całek.

Ostatecznie

$$\iint_A 10y \, dx dy = \frac{3}{2}.$$

(f) Rozwiązanie zaczniemy od narysowania oraz opisanego zbioru A .



Zauważmy, że zbiór A możemy opisać na dwa sposoby:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ oraz } x \leq y \leq 1 \right\}$$

jak również

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \text{ oraz } 0 \leq y \leq 1 \right\}.$$

Okazuje się, że wybierając pierwszy z nich dostaniemy całkę wewnętrzną postaci

$$\int_x^1 e^{y^2} dy,$$

której nie sposób wycałkować w terminach funkcji elementarnych (por. następne zdanie). Dlatego też zmuszeni jesteśmy wybrać sposób drugi. Korzystając z twierdzenia Fubiniego mamy więc

$$\iint_A e^{y^2} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy.$$

Zatem

$$\int_0^y e^{y^2} dx \stackrel{(1)}{=} e^{y^2} \cdot \int_0^y 1 dx \stackrel{(2)}{=} e^{y^2} \cdot x \Big|_{x=0}^{x=y} \stackrel{(3)}{=} e^{y^2} \cdot (y - 0) = ye^{y^2},$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a zatem możemy wyciągnąć czynnik stały (tj. e^{y^2}) przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int 1 dt = t + C$,
- (3) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = y$ do wyniku całek.

Przejdźmy teraz do całki zewnętrznej

$$\begin{aligned} \iint_A e^{y^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx \right) dy \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 ye^{y^2} dy \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 1 \cdot dt \stackrel{(3)}{=} \int_0^1 2y dy \stackrel{(5)}{=} \int_0^1 ye^t \cdot \frac{1}{2y} dt \\ &\quad \left. \begin{array}{l} t = y^2 \\ \frac{1}{2y} dt \stackrel{(4)}{=} dy \end{array} \right\} \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{2} e^t \Big|_{t=0}^{t=1} \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{2} (e^1 - e^0) = \frac{1}{2} (e - 1), \end{aligned}$$

gdzie równość

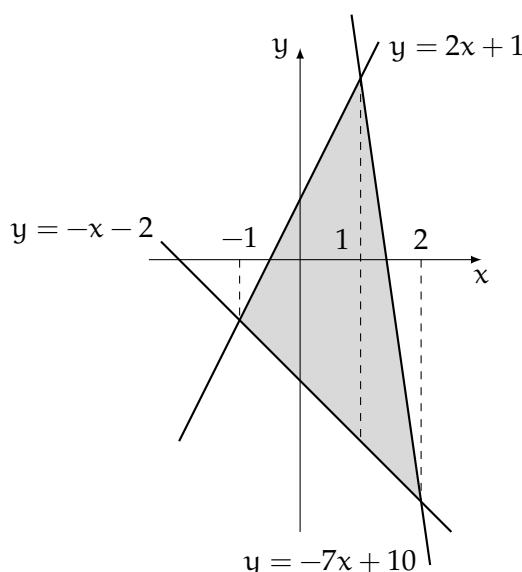
- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. ye^{y^2} ,

- (2) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawimy $t = y^2$),
- (3) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = y^2$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. y (co oznaczamy dopisując symbol dy),
- (4) wynika z obustronnego podzielenia wyrażenia $dt = 2y dy$ przez $2y$,
- (5) wynika z podstawienia t za wyrażenie y^2 w wykładniku wyrażenia e^{y^2} (y stojący przed e^{y^2} zostawiamy bez zmian) oraz zastąpienia dy przez $\frac{1}{2y} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $y = 0$ zamieni się na $t = 0^2 = 0$, a granica górna $y = 1$ zamieni się na $t = 1^2 = 1$),
- (6) wynika ze skrócenia zmiennej y ; możemy również czynnik stały $\frac{1}{2}$ wyciągnąć przed znak całki,
- (7) wynika z tego, że $\int e^t dt = e^t + C$,
- (8) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 0$ oraz $t = 1$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\iint_A e^{y^2} dx dy = \frac{1}{2}(e - 1).$$

(g) Zanim narysujemy obszar A , wyznaczmy punkty przecięcia prostych $y = -x - 2$, $y = -7x + 10$ oraz $y = 2x + 1$. Jak łatwo sprawdzić porównując prawe strony wzorów, proste $y = -x - 2$ oraz $y = -7x + 10$ przecinają się w punkcie o odciętej $x = 2$. Podobnie, proste $y = -x - 2$ oraz $y = 2x + 1$ przecinają się w punkcie o odciętej $x = -1$, a prostej $y = 2x + 1$ oraz $y = -7x + 10$ w punkcie o odciętej $x = 1$.



Zauważmy, że obszar A nie jest obszarem normalnym ani względem osi OX ani względem osi OY . Niech

$$A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 1 \text{ oraz } -x - 2 \leq y \leq 2x + 1\},$$

$$A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ oraz } -x - 2 \leq y \leq -7x + 10\}.$$

Wtedy $A = A_1 \cup A_2$ oraz

$$\iint_A 1 dx dy = \iint_{A_1} 1 dx dy + \iint_{A_2} 1 dx dy.$$

Przejdziemy teraz do wyliczenia pierwszej z tych całek. Korzystając z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\iint_{A_1} 1 \, dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-x-2}^{2x+1} 1 \, dy \right) dx.$$

Zatem

$$\int_{-x-2}^{2x+1} 1 \, dy \stackrel{(1)}{=} y \Big|_{y=-x-2}^{y=2x+1} \stackrel{(2)}{=} (2x+1) - (-x-2) = 3x+3,$$

gdzie równość

(1) wynika z tego, że $\int 1 \, dt = t + C$,

(2) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 2x + 1$ oraz $y = -x - 2$ do wyniku całki.

Stąd

$$\begin{aligned} \iint_{A_1} 1 \, dx dy &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-x-2}^{2x+1} 1 \, dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-1}^1 (3x+3) \, dx \stackrel{(2)}{=} \int_{-1}^1 3x \, dx + \int_{-1}^1 3 \, dx \\ &\stackrel{(3)}{=} 3 \int_{-1}^1 x \, dx + 3 \int_{-1}^1 1 \, dx \stackrel{(4)}{=} 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=-1}^{x=1} + 3 \cdot x \Big|_{x=-1}^{x=1} \\ &\stackrel{(5)}{=} \frac{3}{2} \cdot [1^2 - (-1)^2] + 3[1 - (-1)] = 0 + 6 = 6. \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $3x + 3$,

(2) wynika z faktu, że całka sumy to suma całek,

(3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. 3) wyłączyć przed znaki całek,

(4) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C$ oraz $\int 1 \, dt = t + C$,

(5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = -1$ oraz $x = 1$ do wyniku całek.

Podobnie jak powyżej musimy teraz obliczyć drugą z całek $\iint_{A_2} 1 \, dx dy$. Korzystając z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\iint_{A_2} 1 \, dx dy = \int_1^2 \left(\int_{-x-2}^{-7x+10} 1 \, dy \right) dx.$$

Ponadto

$$\int_{-x-2}^{-7x+10} 1 \, dy \stackrel{(1)}{=} y \Big|_{y=-x-2}^{y=-7x+10} \stackrel{(2)}{=} (-7x+10) - (-x-2) = -6x+12,$$

gdzie równość

(1) wynika z tego, że $\int 1 \, dt = t + C$,

(2) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = -7x + 10$ oraz $y = -x - 2$ do wyniku całki.

Stąd

$$\begin{aligned} \iint_{A_2} 1 \, dx dy &= \int_1^2 \left(\int_{-x-2}^{-7x+10} 1 \, dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_1^2 (-6x+12) \, dx \stackrel{(2)}{=} \int_1^2 -6x \, dx + \int_1^2 12 \, dx \\ &\stackrel{(3)}{=} -6 \int_1^2 x \, dx + 12 \int_1^2 1 \, dx \stackrel{(4)}{=} -6 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_{x=1}^{x=2} + 12 \cdot x \Big|_{x=1}^{x=2} \\ &\stackrel{(5)}{=} (-3) \cdot (2^2 - 1^2) + 12(2 - 1) = (-3) \cdot 3 + 12 = 3, \end{aligned}$$

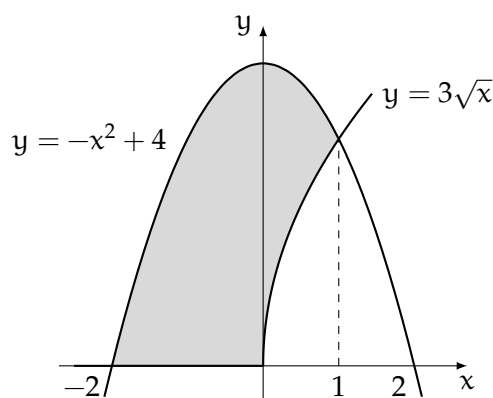
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $-6x + 12$,
- (2) wynika z faktu, że całka sumy to suma całek,
- (3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. -6 oraz 12) wyłączyć przed znaki całek,
- (4) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$ oraz $\int 1 \, dt = t + C$,
- (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 1$ oraz $x = 2$ do wyniku całek.

Ostatecznie

$$\iint_A 1 \, dx dy = \iint_{A_1} 1 \, dx dy + \iint_{A_2} 1 \, dx dy = 6 + 3 = 9.$$

(h) Zanim narysujemy obszar A , wyznaczmy punkty przecięcia krzywych $y = -x^2 + 4$, $y = 3\sqrt{x}$ oraz półprostej $(-\infty, 0]$. Łatwo sprawdzić, że krzywe $y = -x^2 + 4$ oraz $y = 3\sqrt{x}$ przecinają półprostą $(-\infty, 0]$ odpowiednio w punktach o odciętych $x = -2$, $x = 2$ oraz $x = 0$. Pozostaje zatem wyznaczyć punkty przecięcia krzywych $y = -x^2 + 4$ oraz $y = 3\sqrt{x}$. Porównując prawe strony wzorów, otrzymujemy $3\sqrt{x} = -x^2 + 4$. Widać więc, że jednym z rozwiązań tego równania jest $x = 1$. Zauważmy również, że równanie to nie może posiadać więcej rozwiązań, bowiem na przedziale $[0, +\infty)$ funkcja $x \mapsto 3\sqrt{x}$ jest rosnąca, a funkcja $x \mapsto -x^2 + 4$ malejąca.



Zauważmy, że obszar A nie jest obszarem normalnym ani względem osi OX ani względem osi OY . Niech

$$A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0 \text{ oraz } 0 \leq y \leq -x^2 + 4\},$$

$$A_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ oraz } 3\sqrt{x} \leq y \leq -x^2 + 4\}.$$

Wtedy $A = A_1 \cup A_2$ oraz

$$\iint_A xy \, dx dy = \iint_{A_1} xy \, dx dy + \iint_{A_2} xy \, dx dy.$$

Przejdziemy teraz do wyliczenia pierwszej z tych całek. Korzystając z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\iint_{A_1} xy \, dx dy = \int_{-2}^0 \left(\int_0^{4-x^2} xy \, dy \right) dx.$$

Zatem

$$\int_0^{4-x^2} xy \, dy \stackrel{(1)}{=} x \int_0^{4-x^2} y \, dy \stackrel{(2)}{=} x \cdot \frac{1}{2} y^2 \Big|_{y=0}^{y=4-x^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} x (4-x^2)^2 = \frac{1}{2} x^5 - 4x^3 + 8x,$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a zatem możemy czynnik stały x wyciągnąć przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = 4 - x^2$ do wyniku całki.

Stąd

$$\begin{aligned}
 \iint_{A_1} xy \, dx \, dy &= \int_{-2}^0 \left(\int_0^{4-x^2} xy \, dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}x^5 - 4x^3 + 8x \right) dx \\
 &\stackrel{(2)}{=} \int_{-2}^0 \frac{1}{2}x^5 \, dx - \int_{-2}^0 4x^3 \, dx + \int_{-2}^0 8x \, dx \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \int_{-2}^0 x^5 \, dx - 4 \int_{-2}^0 x^3 \, dx + 8 \int_{-2}^0 x \, dx \\
 &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}x^6 \Big|_{x=-2}^{x=0} - 4 \cdot \frac{1}{4}x^4 \Big|_{x=-2}^{x=0} + 8 \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=-2}^{x=0} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{12} \cdot [0^6 - (-2)^6] - [0^4 - (-2)^4] + 4 \cdot [0^2 - (-2)^2] = -\frac{16}{3} + 16 - 16 = -\frac{16}{3},
 \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $\frac{1}{2}x^5 - 4x^3 + 8x$,
- (2) wynika z faktu, że całka sumy/różnicy to suma/różnica całek,
- (3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. $\frac{1}{2}$, 4 oraz 8) wyłączyć przed znaki całek,
- (4) wynika z tego, że $\int t^5 \, dt = \frac{1}{6}t^6 + C$, $\int t^3 \, dt = \frac{1}{4}t^4 + C$ oraz $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = -2$ oraz $x = 0$ do wyniku całek.

Przejdziemy teraz do obliczenia całki $\iint_{A_2} xy \, dx \, dy$. Korzystając z twierdzenia Fubiniego mamy

$$\iint_{A_2} xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{3\sqrt{x}}^{4-x^2} xy \, dy \right) dx.$$

Ponadto

$$\int_{3\sqrt{x}}^{4-x^2} xy \, dy \stackrel{(1)}{=} x \int_{3\sqrt{x}}^{4-x^2} y \, dy \stackrel{(2)}{=} x \cdot \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=3\sqrt{x}}^{y=4-x^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2}x[(4-x^2)^2 - (3\sqrt{x})^2] = \frac{1}{2}x^5 - 4x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 8x,$$

gdzie równość

- (1) wynika z wyciągnięcia czynnika stałego x przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int t \, dt = \frac{1}{2}t^2 + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 3\sqrt{x}$ oraz $y = 4 - x^2$ do wyniku całki.

Stąd

$$\begin{aligned}
 \iint_{A_2} xy \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{3\sqrt{x}}^{4-x^2} xy \, dy \right) dx \stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^5 - 4x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 8x \right) dx \\
 &\stackrel{(2)}{=} \int_0^1 \frac{1}{2}x^5 \, dx - \int_0^1 4x^3 \, dx - \int_0^1 \frac{9}{2}x^2 \, dx + \int_0^1 8x \, dx \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 x^5 \, dx - 4 \int_0^1 x^3 \, dx - \frac{9}{2} \int_0^1 x^2 \, dx + 8 \int_0^1 x \, dx \\
 &\stackrel{(4)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}x^6 \Big|_{x=0}^{x=1} - 4 \cdot \frac{1}{4}x^4 \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} + 8 \cdot \frac{1}{2}x^2 \Big|_{x=0}^{x=1} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \frac{1}{12} \cdot [1^6 - 0^6] - [1^4 - 0^4] - \frac{3}{2}[1^3 - 0^3] + 4 \cdot [1^2 - 0^2] = \frac{1}{12} - 1 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{19}{12},
 \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $\frac{1}{2}x^5 - 4x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 8x$,
- (2) wynika z faktu, że całka sumy/różnicy to suma/różnica całek,
- (3) wynika z tego, że możemy czynniki stałe (tj. $\frac{1}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$ oraz 8) wyłączyć przed znaki całek,
- (4) wynika z tego, że $\int t^5 dt = \frac{1}{6}t^6 + C$, $\int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C$, $\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$ oraz $\int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C$,
- (5) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = 1$ do wyniku całek.

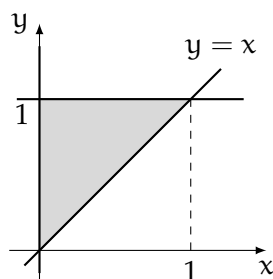
Ostatecznie

$$\iint_A xy \, dx dy = \iint_{A_1} xy \, dx dy + \iint_{A_2} xy \, dx dy = -\frac{16}{3} + \frac{19}{12} = -\frac{15}{4}.$$

22.13 (a) Z postaci całki iterowanej

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \sin(y^2) \, dy \right) dx$$

możemy odczytać, że x zmienia się od 0 do 1 (tzn. $0 \leq x \leq 1$), a y zmienia się od x do 1 (tzn. $x \leq y \leq 1$).



Chcemy teraz, by to zmienna y zmieniała się od liczby do liczby. W oparciu o powyższy rysunek obszar A możemy opisać następująco $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \text{ oraz } 0 \leq y \leq 1\}$. Zatem

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \sin(y^2) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y \sin(y^2) \, dx \right) dy.$$

Jeżeli chodzi o całkę wewnętrzną, to

$$\int_0^y \sin(y^2) \, dx \stackrel{(1)}{=} \sin(y^2) \cdot \int_0^y 1 \, dx \stackrel{(2)}{=} \sin(y^2) \cdot x \Big|_{x=0}^{x=y} \stackrel{(3)}{=} \sin(y^2) \cdot (y - 0) = y \sin(y^2),$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest x , a zatem możemy wyciągnąć czynnik stały (tj. $\sin(y^2)$) przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int 1 dt = t + C$,
- (3) wynika z podstawienia za x granic całkowania $x = 0$ oraz $x = y$ do wyniku całek.

Przejdźmy teraz do całki zewnętrznej

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^y \sin(y^2) dx \right) dy &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 y \sin(y^2) dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 y \sin(y^2) \cdot 1 \cdot dt \stackrel{(3)}{=} \int_0^1 y \sin t \cdot \frac{1}{2y} dt \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_0^1 \sin t \cdot \frac{1}{2} dt \stackrel{(5)}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \sin t dt \stackrel{(6)}{=} -\frac{1}{2} \cos t \Big|_{t=0}^{t=1} \stackrel{(7)}{=} -\frac{1}{2} (\cos 1 - \cos 0) = \frac{1}{2} (1 - \cos 1), \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $y \sin(y^2)$,
- (2) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawiamy $t = y^2$),
- (3) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = y^2$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. y (co oznaczamy dopisując symbol dy),
- (4) wynika z obustronnego podzielenia przez $2y$,
- (5) wynika z podstawienia t za wyrażenie y^2 w $\sin(y^2)$ oraz zastąpienia dx przez $\frac{1}{2y} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $y = 0$ zamieni się na $t = 0^2 = 0$, a granica górna $y = 1$ zamieni się na $t = 1^2 = 1$),
- (6) wynika ze skrócenia y pod znakiem całki oraz wyłączenia czynnika stałego $\frac{1}{2}$ przed znak całki,
- (7) wynika z tego, że $\int \sin t dt = -\cos t + C$,
- (8) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 0$ oraz $t = 1$ do wyniku całek.

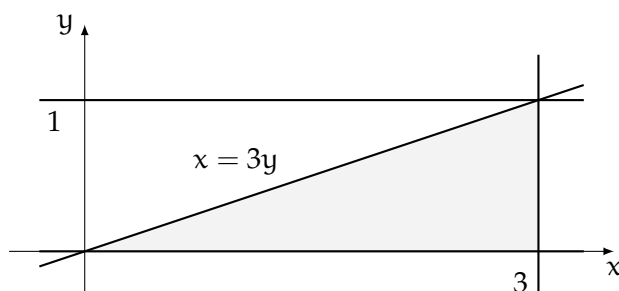
Ostatecznie

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 \sin(y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y \sin(y^2) dx \right) dy = \frac{1}{2} (1 - \cos 1).$$

(b) Z postaci całki iterowanej

$$\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2} dx \right) dy$$

możemy odczytać, że y zmienia się od 0 do 1 (tzn. $0 \leq y \leq 1$) a x zmienia się od $3y$ do 3 (tzn. $3y \leq x \leq 3$).



Chcąc, by tym razem, x zmieniały się od liczby do liczby, patrząc na powyższy rysunek, możemy obszar A opisać następująco $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \text{ oraz } 0 \leq y \leq \frac{1}{3}x\}$. Zatem

$$\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2} dx \right) dy = \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2} dy \right) dx.$$

Przechodząc do całki wewnętrznej mamy

$$\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2} dy \stackrel{(1)}{=} e^{x^2} \cdot \int_0^{\frac{1}{3}x} 1 dy \stackrel{(2)}{=} e^{x^2} \cdot y \Big|_{y=0}^{y=\frac{1}{3}x} \stackrel{(3)}{=} e^{x^2} \cdot \left(\frac{1}{3}x - 0 \right) = \frac{1}{3}xe^{x^2},$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a zatem możemy wyciągnąć czynnik stały (tj. e^{x^2}) przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int 1 dt = t + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = \frac{1}{3}x$ do wyniku całek.

Przejdźmy teraz do całki zewnętrznej

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2} dy \right) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^3 \frac{1}{3}xe^{x^2} dx \stackrel{(2)}{=} \left. \begin{array}{l} 1 \cdot dt \stackrel{(3)}{=} 2x dx \\ \frac{1}{2x} dt \stackrel{(4)}{=} dx \end{array} \right\} \begin{array}{l} t = x^2 \\ \end{array} \stackrel{(5)}{=} \int_0^9 \frac{1}{3}xe^t \frac{1}{2x} dt \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{1}{6} \int_0^9 e^t dt \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{6} \cdot e^t \Big|_{t=0}^{t=9} \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{6}(e^9 - e^0) = \frac{1}{6}(e^9 - 1), \end{aligned}$$

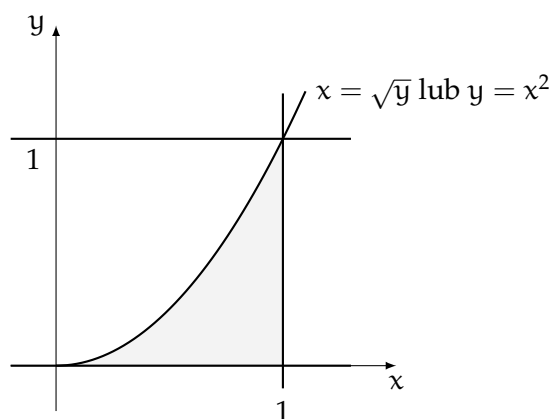
gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $\frac{1}{3}xe^{x^2}$,
- (2) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawiamy $t = x^2$),
- (3) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = x^2$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
- (4) wynika z obustronnego podzielenia przez $2x$,
- (5) wynika z podstawienia t za wyrażenie x^2 w e^{x^2} oraz zastąpienia dx przez $\frac{1}{2x} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 0$ zamieni się na $t = 0^2 = 0$, a granica górna $x = 3$ zamieni się na $t = 3^2 = 9$),
- (6) wynika ze skrócenia x pod znakiem całki oraz wyłączenia czynnika stałego $\frac{1}{6}$ przed znak całki,
- (7) wynika z tego, że $\int e^t dt = e^t + C$,
- (8) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 0$ oraz $t = 9$ do wyniku całek.

Podsumowując

$$\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2} dx \right) dy = \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2} dy \right) dx = \frac{1}{6}(e^9 - 1).$$

- (c) Zaczniemy od odczytania zakresu zmienności zmiennych. Mamy $0 \leq y \leq 1$ oraz $\sqrt{y} \leq x \leq 1$.



Patrząc na powyższy rysunek, możemy obszar A opisać również następująco

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ oraz } 0 \leq y \leq x^2 \right\}.$$

Zatem

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3} \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3} \, dy \right) dx.$$

Przechodząc do całki wewnętrznej mamy

$$\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3} \, dy \stackrel{(1)}{=} \sqrt{1+x^3} \cdot \int_0^{x^2} 1 \, dy \stackrel{(2)}{=} \sqrt{1+x^3} \cdot y \Big|_{y=0}^{y=x^2} \stackrel{(3)}{=} \sqrt{1+x^3} \cdot (x^2 - 0) = x^2 \sqrt{1+x^3},$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a zatem możemy wyciągnąć czynnik stały (tj. $\sqrt{1+x^3}$) przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int 1 \, dx = t + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = x^2$ do wyniku całek.

Stąd

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3} \, dy \right) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^3} \, dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 \left(\begin{array}{c} t = 1+x^3 \\ 1 \cdot dt \stackrel{(3)}{=} (0+3x^2) dx \\ \frac{1}{3x^2} dt \stackrel{(4)}{=} dx \end{array} \right) \stackrel{(5)}{=} \int_1^2 x^2 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3x^2} dt \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{1}{3} \int_1^2 \sqrt{t} \, dt \stackrel{(7)}{=} \frac{1}{3} \int_1^2 t^{\frac{1}{2}} \, dt \stackrel{(8)}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_{t=1}^{t=2} \stackrel{(9)}{=} \frac{2}{9} (2^{\frac{3}{2}} - 1), \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $x^2 \sqrt{1+x^3}$,
- (2) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawiamy $t = 1+x^3$),
- (3) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = 1+x^3$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
- (4) wynika z obustronnego podzielenia przez $3x^2$,

- (5) wynika z podstawienia t za wyrażenie $1 + x^3$ pod pierwiastkiem oraz zastąpienia dx przez $\frac{1}{3x^2} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 0$ zamieni się na $t = 1 + 0^3 = 1$, a granica górna $x = 1$ zamieni się na $t = 1 + 1^3 = 2$),
- (6) wynika ze skrócenia x^2 pod znakiem całki oraz wyłączenia czynnika stałego $\frac{1}{3}$ przed znak całki,
- (7) wynika z zamiany $\sqrt{t}$ na $t^{\frac{1}{2}}$,
- (8) wynika z tego, że $\int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C$,
- (9) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 1$ oraz $t = 2$ do wyniku całek.

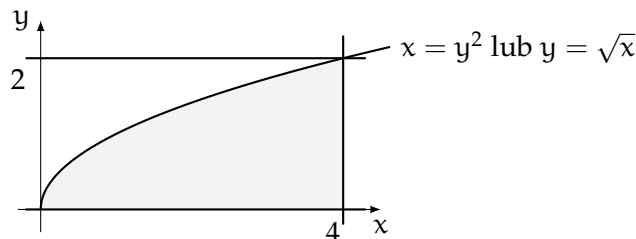
Podsumowując

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{1+x^3} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \sqrt{1+x^3} dy \right) dx = \frac{2}{9} (2^{\frac{3}{2}} - 1).$$

(d) Z postaci całki iterowanej

$$\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 \cos(x^{\frac{3}{2}}) dx \right) dy.$$

możemy odczytać, że $0 \leq y \leq 2$ oraz $y^2 \leq x \leq 4$.



Chcemy teraz, by zewnętrzną zmienną całkowania był x . Patrząc na powyższy rysunek, możemy obszar A opisać zatem następująco

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4 \text{ oraz } 0 \leq y \leq \sqrt{x} \right\}.$$

Stąd

$$\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 \cos(x^{\frac{3}{2}}) dx \right) dy = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \cos(x^{\frac{3}{2}}) dy \right) dx.$$

Przechodząc do całki wewnętrznej mamy

$$\int_0^{\sqrt{x}} \cos(x^{\frac{3}{2}}) dy \stackrel{(1)}{=} \cos(x^{\frac{3}{2}}) \cdot \int_0^{\sqrt{x}} 1 dy \stackrel{(2)}{=} \cos(x^{\frac{3}{2}}) \cdot y \Big|_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \stackrel{(3)}{=} \cos(x^{\frac{3}{2}}) \cdot (\sqrt{x} - 0) = x^{\frac{1}{2}} \cos(x^{\frac{3}{2}}),$$

gdzie równość

- (1) wynika z tego, że zmienną całkowania jest y , a zatem możemy wyciągnąć czynnik stały (tj. $\cos(x^{\frac{3}{2}})$) przed znak całki,
- (2) wynika z tego, że $\int 1 dx = t + C$,
- (3) wynika z podstawienia za y granic całkowania $y = 0$ oraz $y = \sqrt{x}$ do wyniku całek; pamiętajmy również o tym, że $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Obliczymy teraz całkę zewnętrzną. Mamy

$$\begin{aligned} \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \cos(x^{\frac{3}{2}}) dy \right) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \cos(x^{\frac{3}{2}}) dx \stackrel{(2)}{=} \int_0^4 1 \cdot dt \stackrel{(3)}{=} \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx \stackrel{(5)}{=} \int_0^8 x^{\frac{1}{2}} \cos t \cdot \frac{2}{3x^{\frac{1}{2}}} dt \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_0^8 \frac{2}{3x^{\frac{1}{2}}} dt \stackrel{(4)}{=} dx \\ &\stackrel{(6)}{=} \frac{2}{3} \int_0^8 \cos t dt \stackrel{(7)}{=} \frac{2}{3} \cdot \sin t \Big|_{t=0}^{t=8} \stackrel{(8)}{=} \frac{2}{3} (\sin 8 - \sin 0) = \frac{2}{3} \sin 8, \end{aligned}$$

gdzie równość

- (1) wynika z podstawienia za cały nawias wyniku całki wewnętrznej, tj. $x^{\frac{1}{2}} \cos(x^{\frac{3}{2}})$,
- (2) wynika z tego, że będziemy korzystać z metody całkowania przez podstawienie (podstawiamy $t = x^{\frac{3}{2}}$),
- (3) wynika z obustronnego policzenia pochodnych we wzorze $t = x^{\frac{3}{2}}$, przy czym po stronie lewej pochodną liczymy względem t (co oznaczamy dopisując symbol dt), a po stronie prawej względem zmiennej całkowania tj. x (co oznaczamy dopisując symbol dx),
- (4) wynika z obustronnego podzielenia przez $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$,
- (5) wynika z podstawienia t za wyrażenie $x^{\frac{3}{2}}$ w wyrażeniu $\cos(x^{\frac{3}{2}})$ oraz zastąpienia dx przez $\frac{2}{3x^{\frac{1}{2}}} dt$; musimy również pamiętać o zamianie granic całkowania (granica dolna $x = 0$ zamieni się na $t = 0^{\frac{3}{2}} = 0$, a granica górna $x = 4$ zamieni się na $t = 4^{\frac{3}{2}} = 8$),
- (6) wynika ze skrócenia $x^{\frac{1}{2}}$ pod znakiem całki oraz wyłączenia czynnika stałego $\frac{2}{3}$ przed znak całki,
- (7) wynika z tego, że $\int \cos t dt = \sin t + C$,
- (8) wynika z podstawienia za t granic całkowania $t = 0$ oraz $t = 8$ do wyniku całek.

Ostatecznie

$$\int_0^2 \left(\int_{y^2}^4 \cos(x^{\frac{3}{2}}) dx \right) dy = \int_0^4 \left(\int_0^{\sqrt{x}} \cos(x^{\frac{3}{2}}) dy \right) dx = \frac{2}{3} \sin 8.$$

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- M. Borkowski, *Wykład z matematyki dla studentów geoinformacji*, Poznań, 2017.
- D. Bugajewski, *Wykład z matematyki dla chemików*, Poznań, 2015.
- A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 1999.
- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 1*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.
- B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1979.
- W. Karpińska, *Równanie falowe*, Łódź, 2007.

- W. Kryszicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- M. Lassak, *Zadania z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Wspierania Procesu Edukacji, Warszawa, 2003.
- W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, 1976.
- J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2013.
- W. Stankiewicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, część pierwsza*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1971.
- J. Stewart, *Essential calculus*, ThomsonBrooks/Cole, 2007.
- D. G. Zill, *Calculus with analytic geometry*, PWS Publishers, 1985.