

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

FUNKCJI WIELU ZMIENNYCH

TEORIA

FUNKCJA (RZECZYWISTĄ) n ZMIENNYCH f nazywamy przyporządkowanie, które każdemu elementowi $(x_1, \dots, x_n)$ należącemu do pewnego zbioru zwanego dziedziną funkcji przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą $f(x_1, \dots, x_n)$.

UWAGA: W dalszym ciągu ograniczymy się do rozważania (z drobnymi wyjątkami) funkcji dwóch zmiennych.

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI. Funkcję $f: (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *ciągłą w punkcie* $(\xi, \eta) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych równoważnych warunków:

- dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$ dla każdego punktu $(x, y) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ takiego, że $|x - \xi| < \delta$ oraz $|y - \eta| < \delta$,
- dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach z prostokąta $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ zbieżnych odpowiednio do punktów ξ oraz η ciąg $(f(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(\xi, \eta)$.

Funkcję $f: (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *ciągłą*, jeżeli jest ona ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

POCHODNE CZĄSTKOWE. Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych określoną na prostokącie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ oraz niech $(\xi, \eta) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$.

- *Pochodną cząstkową funkcji f w punkcie (ξ, η) względem pierwszej zmiennej* nazywamy granicę (o ile istnieje)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h, \eta) - f(\xi, \eta)}{h}.$$

- *Pochodną cząstkową funkcji f w punkcie (ξ, η) względem drugiej zmiennej* nazywamy granicę (o ile istnieje)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi, \eta + h) - f(\xi, \eta)}{h}.$$

POCHODNYMI CZĄSTKOWYMI FUNKCJI f , określonej na prostokącie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$, nazywamy funkcje $\frac{\partial f}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}$, które punktom $(s, t) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ przyporządkowują wartości pochodnych cząstkowych w tych punktach, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(s, t)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(s, t)$.

POCHODNE WYŻSZYCH RZĘDÓW. Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych określoną na prostokącie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. Załóżmy, że w każdym punkcie prostokąta $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ istnieją pochodne cząstkowe funkcji f . Pochodne cząstkowe tych pochodnych, jeżeli istnieją, nazywamy *pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego* funkcji f i oznaczamy symbolami

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).\end{aligned}$$

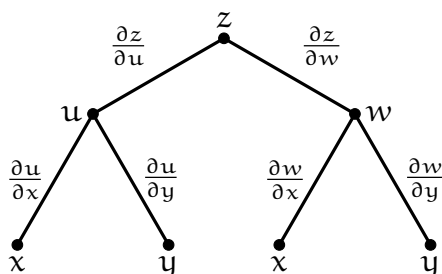
Podobnie definiuje się pochodne trzeciego i wyższych rzędów.

POCHODNYMI MIESZANYMI funkcji f nazywamy pochodne $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Twierdzenie Schwarz'a o pochodnych mieszanych. Załóżmy, że funkcja f określona na prostokącie $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ posiada pochodne mieszane drugiego rzędu, które są ciągłe w punkcie $(\xi, \eta) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. Wtedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta).$$

REGUŁA ŁAŃCUCHOWA. W celu obliczania pochodnych cząstkowych funkcji złożonych korzysta się z tzw. *reguły łańcuchowej*. Przypuśćmy, że chcemy obliczyć pochodne cząstkowe funkcji $z = f(u, w)$, przy czym $u = g(x, y)$ oraz $w = h(x, y)$. W tym celu rysujemy drzewo zależności zmiennych



Poruszając się po drzewie od korzenia (wierzchołka z) do liści (wierzchołków x i y) wzdłuż krawędzi, otrzymujemy następujące wzoru

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Należy pamiętać, że poruszając się wzdłuż tej samej gałęzi (czyli ciągu krawędzi prowadzących od korzenia do liścia) należy poszczególne „wyniki” mnożyć, a w przypadku zmiany gałęzi należy „wyniki” dodawać.

EKSTREMA LOKALNE. Mówimy, że funkcja f określona na prostokącie otwartym $D = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ osiąga w punkcie $(\xi, \eta) \in D$

- *maksimum lokalne*, gdy istnieje taki prostokąt otwarty $U \subseteq D$ zawierający punkt (ξ, η) , że dla wszystkich $(x, y) \in U$ zachodzi $f(\xi, \eta) \geq f(x, y)$,

- *minimum lokalne*, gdy istnieje taki prostokąt otwarty $U \subseteq D$ zawierający punkt (ξ, η) , że dla wszystkich $(x, y) \in U$ zachodzi $f(\xi, \eta) \leq f(x, y)$.

WARUNEK KONIECZNY ISTNIENIA EKSTREMUM LOKALNEGO. Jeżeli funkcja $f: (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga w punkcie (ξ, η) ekstremum lokalne i ma w tym punkcie pochodne cząstkowe, to

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) = 0.$$

UWAGA: Podobnie jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, warunek konieczny istnienia ekstremum *nie* jest warunkiem wystarczającym, tzn. nawet jeżeli funkcja f posiada pochodne cząstkowe, które zerują się w punkcie (ξ, η) , to niekoniecznie ma ona w tym punkcie ekstremum lokalne!

HESJAN. Niech $f: (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, która posiada pochodne cząstkowe drugiego rzędu. *Hesjanem* funkcji f nazywamy następujący wyznacznik funkcyjny

$$H(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Samą macierz drugich pochodnych nazywamy *macierzą Hessego*.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY ISTNIENIA EKSTREMUM LOKALNEGO 1. Niech f będzie funkcją zdefiniowaną na prostokącie otwartym zawierającym punkt (ξ, η) , która posiada ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, oraz niech

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta) = 0.$$

- Jeżeli $H(\xi, \eta) > 0$, to funkcja f w punkcie (ξ, η) ma ekstremum lokalne, przy czym jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \eta) > 0$, to jest to minimum, a jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi, \eta) < 0$, to jest to maksimum.
- Jeżeli $H(\xi, \eta) < 0$, to funkcja f w punkcie (ξ, η) nie ma ekstremum lokalnego. W punkcie (ξ, η) występuje tzw. *punkt siodłowy*.
- Jeżeli $H(\xi, \eta) = 0$, to kwestia istnienia w punkcie (ξ, η) ekstremum lokalnego funkcji f nie jest rozstrzygnięta.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY ISTNIENIA EKSTREMUM LOKALNEGO 2. Niech f będzie funkcją n zmiennych zdefiniowaną na prostokącie otwartym zawierającym punkt $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$, która posiada ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz niech

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) = 0 \quad \text{dla każdego } i = 1, \dots, n.$$

Ponadto dla $i = 1, \dots, n$ niech

$$H_i(\xi) := \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(\xi) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\xi) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_i}(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1}(\xi) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2}(\xi) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\xi) \end{bmatrix}.$$

- Jeśli $H_i(\xi) > 0$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, to funkcja f posiada w punkcie ξ minimum lokalne.
- Jeśli $(-1)^i H_i(\xi) > 0$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, to funkcja f posiada w punkcie ξ maksimum lokalne.
- Jeśli ciąg kolejnych hesjanów $H_i(\xi)$, gdzie $i \in \{1, \dots, n\}$, nie spełnia żadnego z dwóch powyższych warunków, to o ile $H_i(\xi) \neq 0$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie ξ .

ZADANIA

Zadanie 22.1. Oblicz z definicji pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie (ξ, η) , jeżeli

- (a) $f(x, y) = 3x + 2y$ oraz $(\xi, \eta) = (1, -1)$, (c) $f(x, y) = y^2 - xy$ oraz $(\xi, \eta) = (4, 1)$,
 (b) $f(x, y) = x^2 y$ oraz $(\xi, \eta) = (-2, 0)$, (d) $f(x, y) = x \sin y$ oraz $(\xi, \eta) = (0, \pi)$.

Zadanie 22.2. Oblicz pochodne cząstkowe następujących funkcji

- (a) $f(x, y) = x - 4y$, (l) $f(x, y) = \cos(y + \sin x)$,
 (b) $f(x, y) = 3x + y^2$, (m) $f(x, y) = \frac{y}{xy + y}$,
 (c) $f(x, y) = x^3 y - 2y^3 x$, (n) $f(x, y) = \frac{x}{x + y^2}$,
 (d) $f(x, y) = 2x^{-3} y + xy^{-3}$, (o) $f(x, y) = \frac{\sin x}{\cos y}$,
 (e) $f(x, y) = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$, (p) $f(x, y) = \frac{\cos y}{\sin x}$,
 (f) $f(x, y) = (4xy^3 + x^2 + 6y)^4$,
 (g) $f(x, y) = ye^{x+xy}$, (q) $f(x, y, z) = xy^{-3} z^4 + 3yz^{-1}$,
 (h) $f(x, y) = x^2 e^{x-3y}$, (r) $f(x, y, z) = 4x^{-2} y^2 z - 2xy^{-3}$,
 (i) $f(x, y) = \sin(x^2 + 2xy)$, (s) $f(x, y, z) = \sin(2x + 3y + z)$,
 (j) $f(x, y) = \cos(3y^2 - x^3 y)$, (t) $f(x, y, z) = e^{x^2 - 2y + 5z}$,
 (k) $f(x, y) = \ln(x + \ln y)$, (u) $f(x, y, z) = x^2 e^{yz^3}$,

$$(v) \quad f(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2 y^2 + 3x},$$

$$(x) \quad f(x, y, z) = \frac{x^2 y}{yx + z}.$$

$$(w) \quad f(x, y, z) = \frac{xy^3}{y - xz},$$

Zadanie 22.3. Oblicz pochodne cząstkowe pierwszego oraz drugiego rzędu poniższych funkcji:

$$(a) \quad f(x, y) = x^3 - 2x^2 y + 3y^2,$$

$$(c) \quad f(x, y) = x^2 \sin^2 y,$$

$$(b) \quad f(x, y) = \frac{x}{x + y},$$

$$(d) \quad f(x, y) = y \ln x + x^2 \ln y.$$

Zadanie 22.4. Pokaż, że funkcja $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + vt) + f(x - vt)]$, gdzie funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją dwukrotnie różniczkowalną, spełnia równanie falowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Stała v jest prędkością rozprzestrzeniania się (propagacji) fali.

Zadanie 22.5. Pokaż, że funkcja $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $u(x, y) = yf(x^2 - y^2)$, gdzie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją różniczkowalną, spełnia równanie

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2}.$$

Zadanie 22.6. Stosując regułę łańcuchową oblicz $\frac{\partial z}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial z}{\partial y}$, jeżeli:

$$(a) \quad z(u, w) = u^3 w, u(x, y) = xy^{-2}, w(x, y) = 3x - y,$$

$$(b) \quad z(u, w) = uw^{-2}, u(x, y) = x + 2y, w(x, y) = x^2 y,$$

$$(c) \quad z(u, w) = u^3 + 3uw - w^{-2}, u(x, y) = 2x + 5y, w(x, y) = xy,$$

$$(d) \quad z(u, w) = u^{-3} - 2uw + w^2, u(x, y) = 3x - 4y, w(x, y) = xy^{-1},$$

$$(e) \quad z(u, w) = uw^2, u(x, y) = e^{x+y}, w(x, y) = \ln(2x^3 - 5y),$$

$$(f) \quad z(u, w) = u^2 w, u(x, y) = e^{x-y}, w(x, y) = \ln(3y^2 + 7x),$$

$$(g) \quad z(u, w, x) = u^{-2} x - 4w^4, u(x, y) = -3xy, w(x, y) = y + 2x^3,$$

$$(h) \quad z(u, w, y) = u^2 + 7y^3 w, u(x, y) = 2xy, w(x, y) = x - 3y^{-4}.$$

Zadanie 22.7. Znaleźć ekstrema lokalne następujących funkcji dwóch zmiennych:

$$(a) \quad f(x, y) = -x^2 + xy - y^2 + 2x - y,$$

$$(f) \quad f(x, y) = 4x + x^{-1} - 8y - 2y^{-1},$$

$$(b) \quad f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y^2 - 2x - y + 1,$$

$$(g) \quad f(x, y) = (x - 2y)e^{xy},$$

$$(c) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

$$(h) \quad f(x, y) = (y^2 + 4x)e^{2x},$$

$$(d) \quad f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 12xy,$$

$$(i) \quad f(x, y) = 16 \ln(y + 2x) - 8x - y^2,$$

$$(e) \quad f(x, y) = x + x^{-1} + y^2,$$

$$(j) \quad f(x, y) = \arctg(xy) + \arctg(x).$$

Zadanie 22.8. Pokaż, że w oparciu o analizę znaku hesjanu nie można rozstrzygnąć istnienia ekstremum lokalnego funkcji $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x, y) = x^2 + y^4$, choć funkcja ta posiada minimum lokalne w punkcie $(0, 0)$.

Zadanie 22.9. Znaleźć ekstrema lokalne następujących funkcji trzech zmiennych:

- (a) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$,
 (b) $f(x, y, z) = 1 - x^3 - xy - y^2 + 2xz - 2z^2 - 3y$,
 (c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^3 - 2x + 6yz$.

ODPOWIEDZI

22.1 (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) = 2$ (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-2, 0) = 4$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(4, 1) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(4, 1) = -2$
 (d) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \pi) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi) = 0$ **22.2** (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -4$ (b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y - 2y^3$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 - 6y^2x$ (d) $\frac{\partial f}{\partial x} = -6x^{-4}y + y^{-3}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^{-3} - 3xy^{-4}$ (e) $\frac{\partial f}{\partial x} = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 3(5x^2 - 3y^2)(5x^2y - y^3 + 7)^2$ (f) $\frac{\partial f}{\partial x} = 8(x + 2y^3)(x^2 + 4xy^3 + 6y)^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 24(2xy^2 + 1)(x^2 + 4xy^3 + 6y)^3$
 (g) $\frac{\partial f}{\partial x} = y(y + 1)e^{x+xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = (1 + xy)e^{x+xy}$ (h) $\frac{\partial f}{\partial x} = x(x + 2)e^{x-3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2e^{x-3y}$
 (i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x + y)\cos(x^2 + 2xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x\cos(x^2 + 2xy)$ (j) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y\sin(3y^2 - x^3y)$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = -(6y - x^3)\sin(3y^2 - x^3y)$ (k) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+\ln y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{xy+y\ln y}$ (l) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\cos x \cdot \sin(y + \sin x)$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(y + \sin x)$ (m) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{(x+1)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (n) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x+y^2)^2}$ (o) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos x}{\cos y}$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x \sin y}{\cos^2 y}$ (p) $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\cos x \cos y}{\sin^2 x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sin y}{\sin x}$ (q) $\frac{\partial f}{\partial x} = y^{-3}z^4$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -3xy^{-4}z^4 + 3z^{-1}$,
 $\frac{\partial f}{\partial z} = 4xy^{-3}z^3 - 3yz^{-2}$ (r) $\frac{\partial f}{\partial x} = -8x^{-3}y^2z - 2y^{-3}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8x^{-2}yz + 6xy^{-4}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 4x^{-2}y^2$
 (s) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\cos(2x + 3y + z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3\cos(2x + 3y + z)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \cos(2x + 3y + z)$ (t) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2-2y+5z}$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = -2e^{x^2-2y+5z}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 5e^{x^2-2y+5z}$ (u) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{yz^3}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2z^3e^{yz^3}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2yz^2e^{yz^3}$
 (v) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{2\sqrt{1+z^2y^2+3x}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{yz^2}{\sqrt{1+z^2y^2+3x}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{zy^2}{\sqrt{1+z^2y^2+3x}}$ (w) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^4}{(y-xz)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy^3-3x^2y^2z}{(y-xz)^2}$,
 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x^2y^3}{(y-xz)^2}$ (x) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2y^2+2xyz}{(yx+z)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2z}{(yx+z)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{x^2y}{(yx+z)^2}$ **22.3** (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$ (b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-y}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{(x+y)^3}$ (c) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin^2 y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 \sin y \cos y$,
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin^2 y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4x \sin y \cos y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 \cos^2 y - 2x^2 \sin^2 y$ (d) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{-1} + 2x \ln y$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2y^{-1} + \ln x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \ln y - yx^{-2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xy^{-1} + x^{-1}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2y^{-2}$
22.6 (a) $\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^3y^{-6} - 3x^2y^{-5}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^3y^{-6} - 18x^4y^{-7}$ (b) $\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^{-4}y^{-2} - 8x^{-5}y^{-1}$,
 $\frac{\partial z}{\partial y} = -2x^{-3}y^{-3} - 2x^{-4}y^{-2}$ (c) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x^{-3}y^{-2} + 24x^2 + 132xy + 165y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^{-2}y^{-3} + 66y^2 + 330xy + 375y^2$
 (d) $\frac{\partial z}{\partial x} = -12xy^{-1} + 2xy^{-4} - 9(3x - 4y)^{-4} + 8$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^2y^{-2} - 4x^2y^{-5} + 12(3x - 4y)^{-4}$
 (e) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} \ln^2(2x^3 - 5y) + 12x^2(2x^3 - 5y)^{-1}e^{x+y} \ln(2x^3 - 5y)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y} \ln^2(2x^3 - 5y)$
 $- 10(2x^3 - 5y)^{-1}e^{x+y} \ln(2x^3 - 5y)$ (f) $\frac{\partial z}{\partial x} = 7(7x + 3y^2)^{-1}e^{2x-2y} + 2e^{2x-2y} \ln(3y^2 + 7x)$,
 $\frac{\partial z}{\partial y} = 6y(7x + 3y^2)^{-1}e^{2x-2y} - 2e^{2x-2y} \ln(3y^2 + 7x)$ (g) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{9}x^{-2}y^{-2} - 96x^2(2x^3 + y)^3$,
 $\frac{\partial z}{\partial y} = -16(2x^3 + y)^3 - \frac{2}{9}x^{-1}y^{-3}$ (h) $\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy^2 + 6y^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 8x^2y + 18xy^2 + 18y^{-2}$ **22.7** (a) Funkcja f ma w punkcie $(1, 0)$ maksimum lokalne. (b) W punkcie $(-1, 2)$ funkcja f ma punkt siodłowy.
 (c) W punkcie $(0, 0)$ funkcja f ma punkt siodłowy. W punkcie $(1, 1)$ funkcja f ma minimum lokalne.
 (d) W punkcie $(-2, -2)$ funkcja f ma maksimum lokalne, a w punkcie $(2, -2)$ minimum lokalne.
 W punktach $(0, -4)$ oraz $(0, 0)$ funkcja f ma punkty siodłowe. (e) W punkcie $(-1, 0)$ funkcja f ma punkt siodłowy. W punkcie $(1, 0)$ funkcja f ma minimum lokalne. (f) W punkcie $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ funkcja

f ma maksimum lokalne, a w punkcie $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ minimum lokalne. W punktach $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ oraz $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ funkcja f ma punkty siodłowe. (g) W punktach $(-1, \frac{1}{2})$ oraz $(1, -\frac{1}{2})$ funkcja f ma punkty siodłowe. (h) W punkcie $(-\frac{1}{2}, 0)$ funkcja f ma minimum lokalne. (i) W punkcie $(1, 2)$ funkcja f ma maksimum lokalne. (j) W punkcie $(0, -1)$ funkcja f ma punkt siodłowy. **22.8 (a)** W punkcie $(1, -1, 3)$ funkcja f ma minimum lokalne. (b) W punkcie $(1, -2, \frac{1}{2})$ funkcja f ma maksimum lokalne. W punkcie stacjonarnym $(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4})$ funkcja f nie ma ekstremum. (c) W punkcie $(1, -18, 6)$ funkcja f ma minimum lokalne. W punkcie stacjonarnym $(1, 0, 0)$ funkcja f nie ma ekstremum.

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- D. Bugajewski, *Wykład z matematyki dla chemików*, Poznań, 2015.
- A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 1999.
- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 1*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.
- B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1979.
- W. Karpińska, *Równanie falowe*, Łódź, 2007.
- W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część 2*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- M. Lassak, *Zadania z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Wspierania Procesu Edukacji, Warszawa, 2003.
- W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, 1976.
- J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2013.
- W. Stankiewicz, *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, część pierwsza*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1971.
- J. Stewart, *Essential calculus*, ThomsonBrooks/Cole, 2007.
- D. G. Zill, *Calculus with analytic geometry*, PWS Publishers, 1985.