

ELEMENTY ALGEBRY LINIOWEJ

TEORIA

MACIERZ. Niech m i n będą liczbami naturalnymi. *Macierzą (prostokątną)* o m wierszach i n kolumnach, nazywamy funkcję przyporządkowującą każdej parze liczb naturalnych (i, j) , gdzie $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, liczbę (lub ogólnie pewien obiekt) a_{ij} . Liczby a_{ij} nazywamy *elementami* macierzy A .

UWAGA: Choć z definicji macierz jest funkcją $A: (i, j) \mapsto a_{ij}$, w praktyce przedstawiamy ją w postaci tablicy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix};$$

często piszemy również $A = [a_{ij}]$.

WYMIAR MACIERZY. O macierzy A powiemy, że ma *wymiar* $m \times n$ (czyt. em na en), gdy ma m wierszy i n kolumn; piszemy wtedy $A_{m \times n}$ lub $[a_{ij}]_{m \times n}$.

GŁÓWNA PRZEKĄTNĄ macierzy $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ nazywamy następujący ciąg elementów macierzy $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{kk}$, gdzie $k = \min\{m, n\}$. Na poniższym rysunku przedstawiono przykładowe macierze z zaznaczonymi głównymi przekątnymi:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \boxed{a_{44}} \end{bmatrix}$$

MACIERZ KWADRATOWA. Gdy liczba (m) wierszy macierzy jest równa liczbie (n) kolumn, to macierz taką nazywamy *macierzą kwadratową*, a liczbę n (lub m) jej *stopniem*. Przykładami macierzy kwadratowych są macierze

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 7 & -3 \end{bmatrix};$$

stopień macierzy A wynosi 2, a stopień macierzy B wynosi 3.

MACIERZĄ DIAGONALNĄ nazywamy macierz kwadratową, w której wszystkie elementy poza główną przekątną są równe zero, np.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

MACIERZĄ JEDNOSTKOWĄ nazywamy macierz diagonalną, w której wszystkie elementy znajdujące się na głównej przekątnej są równe 1, np.

$$[1] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz jednostkową (niezależnie od stopnia) oznaczamy symbolem I .

MACIERZĄ ZEROWĄ nazywamy macierz prostokątną składającą się z samych zer, np.

$$[0] \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz zerową (niezależnie od wymiaru) oznaczamy symbolem 0 .

RÓWNOŚĆ MACIERZY. Dwie macierze $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ uznajemy za *równe*, jeżeli

- są tego samego wymiaru $m \times n$ oraz
- na wszystkich odpowiadających sobie miejscach mają takie same elementy, tzn. $a_{ij} = b_{ij}$ dla $i = 1, 2, \dots, m$ i $j = 1, 2, \dots, n$.

TRANSPONOWANIEM macierzy nazywamy działanie, które polega na zamianie wierszy macierzy na kolumny lub, równoważnie, kolumn na wiersze, z zachowaniem ich kolejności. Macierz A po transponowaniu oznaczamy symbolem A^T .

WYZNACZNIK (DEFINICJA REKURENCYJNA – ROZWINIĘCIA LAPLACE'A). Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia n nazywamy liczbę $\det A$ (od słowa *determinant*) zdefiniowaną w następujący sposób:

- jeżeli $n = 1$, tj. $A = [a_{11}]$, to $\det A = a_{11}$,
- jeżeli $n > 1$, to $\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$, gdzie A_{1j} oznacza macierz stopnia $n-1$, powstałą z macierzy A poprzez skreślenie pierwszego wiersza oraz j -tej kolumny.

UWAGA: Wyznacznik macierzy A oznacza się również symbolem $|A|$.

WYZNACZNIK MACIERZY STOPNIA 2 można obliczyć ze wzoru

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

WYZNACZNIK MACIERZY STOPNIA 3 można obliczyć ze wzoru Sarrusa

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

WAŻNA WŁASNOŚĆ WYZNACZNIKA. Jeżeli macierze kwadratowe A i B są tego samego stopnia, to $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

MACIERZ ODWROTNA. Niech A będzie macierzą kwadratową. Jeżeli istnieje macierz kwadratowa B tego samego stopnia co macierz A i taka, że $A \cdot B = B \cdot A = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową, to macierz B nazywamy *macierzą odwrotną* do macierzy A. Macierz odwrotną do macierzy A oznaczamy symbolem A^{-1} .

TWIERDZENIE O ISTNIENIU I POSTACI MACIERZY ODWROTNEJ. Macierz kwadratowa A stopnia n posiada macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona *macierzą nieosobliwą*, tzn. gdy $\det A \neq 0$. W takim przypadku $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^d)^T$, gdzie $A^d = [D_{ij}]$ a D_{ij} jest *dopełnieniem algebraicznym* elementu a_{ij} macierzy A, tzn. $D_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ oraz A_{ij} jest macierzą kwadratową stopnia $n - 1$ powstałą z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

MACIERZ ODWROTNA DO MACIERZY STOPNIA 2 można wyznaczyć ze wzoru

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

ZADANIA

Zadanie 21.1. Oblicz: $A + B$, $2B - 3A$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^T oraz B^T , jeżeli:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$

(d) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$

$$(e) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (f) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 21.2. Znajdź macierze $A, B \neq 0$ takie, że $A \cdot B = 0$ oraz $B \cdot A \neq 0$.

Zadanie 21.3. Pokaż, że jeżeli mnożenie macierzy $A \cdot B$ jest wykonalne, to wykonalne jest również mnożenie $B^T \cdot A^T$, a ponadto zachodzi wzór $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Zadanie 21.4. Niech A będzie macierzą wymiaru $m \times n$. Rozważmy funkcję $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ daną wzorem $L(x_1, \dots, x_n) := A \cdot [x_1, \dots, x_n]^T$. Pokaż, że L jest odwzorowaniem liniowym, tzn. dla dowolnych punktów $x := (x_1, \dots, x_n), y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz dowolnych liczb rzeczywistych α, β spełnia warunek $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$.

Zadanie 21.5. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy stopnia 2:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad (b) \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad (c) \quad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad (d) \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 21.6. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy stopnia 3:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (c) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (d) \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 21.7. Oblicz wyznaczniki następujących macierzy stopnia 4:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (c) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (d) \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 21.8. Sprawdź, czy macierze A i B są odwrotne względem siebie:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (c) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad (d) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 21.9. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy stopnia 2:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}, & \text{(c)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, & \text{(e)} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, & \text{(g)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \\ \text{(b)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, & \text{(d)} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, & \text{(f)} \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, & \text{(h)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Zadanie 21.10. Wyznacz macierze odwrotne do macierzy stopnia 3:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}, & \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, & \text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Zadanie 21.11. Pokaż, że jeżeli macierze kwadratowe A i B spełniają równość $A \cdot B = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową, to wtedy prawdziwa jest również równość $B \cdot A = I$.

Zadanie 21.12. Niech A i B będą macierzami kwadratowymi tego samego stopnia posiadającymi macierze odwrotne, odpowiednio, A^{-1} oraz B^{-1} . Wykaż, że macierzą odwrotną do macierzy $A \cdot B$ jest $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Zadanie 21.13. Rozwiąż następujące równania macierzowe:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} X \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, & \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \\ \text{(b)} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & \text{(d)} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}. \end{array}$$

ODPOWIEDZI

21.1 (a) Mamy

$$\begin{array}{ll} A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+1 \\ 1+1 & 0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 2B - 3A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ A \cdot B = \begin{bmatrix} 1+2 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & B \cdot A = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 1+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b) Mamy

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 3 + 1 \\ 2 + 0 & (-1) + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & 2B - 3A &= \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \\
 A \cdot B &= \begin{bmatrix} (-2) + 0 & 1 + 3 \\ (-4) + 0 & 2 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} & B \cdot A &= \begin{bmatrix} (-2) + 2 & (-6) + (-1) \\ 0 + 2 & 0 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
 A^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & B^T &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(c) Działañ $A + B$, $2B - 3A$ oraz $B \cdot A$ nie można wykonać. Ponadto mamy

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+2 \\ 1+3 & 2+3 \\ 1+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Działañ $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$ nie można wykonać. Ponadto mamy

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{bmatrix} (-2) + 1 & 0 + 3 & 2 + (-2) \\ 1 + 2 & 1 + 1 & (-2) + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} & A^T &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \\
 2B - 3A &= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -10 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix} & B^T &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(e) Działañ $A + B$, $2B - 3A$ oraz $A \cdot B$ nie można wykonać. Ponadto mamy

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1+2+2 & 2+1+2 & 2+0+2 \\ 1+0+1 & 2+0+1 & 2+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(f) Mamy

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{bmatrix} 2+1 & -1+1 & 1+2 \\ 1+4 & 3+3 & 2+0 \\ 2+3 & 0+2 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \\
 2B - 3A &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 8 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 3 & 9 & 6 \\ 6 & 0 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \\
 A \cdot B &= \begin{bmatrix} 2-4+3 & 2-3+2 & 4+0+1 \\ 1+12+6 & 1+9+4 & 2+0+2 \\ 2+0+9 & 2+0+6 & 4+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 19 & 14 & 4 \\ 11 & 8 & 7 \end{bmatrix} \\
 B \cdot A &= \begin{bmatrix} 2+1+4 & -1+3+0 & 1+2+6 \\ 8+3+0 & -4+9+0 & 4+6+0 \\ 6+2+2 & -3+6+0 & 3+4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 11 & 5 & 10 \\ 10 & 3 & 10 \end{bmatrix} \\
 A^T &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & B^T &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

21.2 Macierze A i B mogą być np. postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

21.3 Skoro mnożenie macierzy $A \cdot B$ jest wykonalne, liczba kolumn macierzy A i wierszy macierzy B muszą być równe. Macierze A i B możemy zatem przedstawić w postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}.$$

Macierz $(A \cdot B)^T$ ma wymiar $k \times m$, gdyż $A \cdot B$ jest wymiaru $m \times k$. Zauważmy również, że w i -tym wierszu i j -tej kolumnie macierzy $(A \cdot B)^T$ stoi element, który w macierzy $A \cdot B$ stał w j -tym wierszu oraz i -tej kolumnie; tutaj $i \in \{1, \dots, k\}$ oraz $j \in \{1, \dots, m\}$. Element taki jest sumą iloczynów liczb leżących w j -tym wierszu macierzy A oraz i -tej kolumnie macierzy B. Jest on więc równy $\sum_{l=1}^n a_{jl} b_{li}$. Wyznamy teraz element macierzy $B^T \cdot A^T$ leżący w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie. Na początku zauważmy, że macierz B^T ma wymiar $k \times n$, a macierz A^T ma wymiar $n \times m$. Oznacza to, że mnożenie macierzy $B^T \cdot A^T$ jest wykonalne oraz wymiar macierzy $B^T \cdot A^T$ to $k \times m$. Element leżący w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie macierzy $B^T \cdot A^T$ jest sumą iloczynów liczb leżących w i -tym wierszu macierzy B^T oraz j -tej kolumnie macierzy A^T . Ale

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1k} & b_{2k} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}.$$

Skąd wynika, że element leżący w i -tym wierszu oraz j -tej kolumnie macierzy $B^T \cdot A^T$ jest postaci $\sum_{l=1}^n b_{li} a_{jl} = \sum_{l=1}^n a_{jl} b_{li}$. Oznacza to, że na każdym miejscu (i, j) , gdzie $i \in \{1, \dots, k\}$ oraz $j \in \{1, \dots, m\}$, macierze $(A \cdot B)^T$ oraz $B^T \cdot A^T$ mają takie same elementy. Zatem prawdziwa jest równość $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

21.4 Niech

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Wtedy dla dowolnych $x := (x_1, \dots, x_n), y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} L(\alpha x + \beta y) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \dots \\ \alpha x_n + \beta y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(\alpha x_j + \beta y_j) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(\alpha x_j + \beta y_j) \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}(\alpha x_j + \beta y_j) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j + \beta \cdot \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j + \beta \cdot \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j \\ \dots \\ \alpha \cdot \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j + \beta \cdot \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \end{bmatrix} + \beta \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \end{bmatrix} \\ &= \alpha L(x) + \beta L(y). \end{aligned}$$

Oznacza to, że L jest odwzorowaniem liniowym.

21.5 (a) Mamy

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - (-2) \cdot 4 = 18 + 8 = 26.$$

(b) Mamy

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 7 - 3 \cdot 2 = -7 - 6 = -13.$$

(c) Mamy

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 - (-5) \cdot (-4) = 6 - 20 = -14.$$

(d) Mamy

$$\det \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = 6 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) = -6 + 6 = 0.$$

21.6 (a) Korzystając z metody Sarrusa, otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 12 + 3 + 0 - (0 + 4 - 9) = 15 - (-5) = 20.$$

(b) Korzystając z metody Sarrusa, otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{matrix} = -2 + 0 + 0 - (0 - 1 + 0) = -2 - (-1) = -1.$$

Wyznacznik w tym podpunkcie możemy również łatwo obliczyć wykorzystując rozwinięcie Laplace'a. Mamy bowiem

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 + 1 = -1.$$

(c) Korzystając z metody Sarrusa, otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 2 + 0 + 0 - (24 + 8 + 0) = 2 - 32 = -30.$$

(d) Korzystając z metody Sarrusa, otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{matrix} = -1 - 24 - 12 - (4 - 6 + 12) = -37 - (10) = -47.$$

21.7 (a) Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszego wiersza, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} &= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= -1 + (-2) = -3, \end{aligned}$$

gdyż

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -1 + 0 + 0 - (0 + 1 - 1) = -1$$

oraz

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = -1 + 0 + 0 - (0 + 1 + 0) = -2.$$

(b) Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem pierwszego wiersza, otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ = (-1) \cdot 1 + 0 = -1,$$

gdyż

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} = 0 + 0 + 0 - (0 - 1 + 0) = 1$$

oraz

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 1 + 0 + 0 - (0 + 1 + 0) = 0.$$

(c) Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem czwartego wiersza, otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^{4+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ = 2 \cdot (-3) + 6 = 0,$$

gdyż

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 4 + 0 + 1 - (4 + 0 + 4) = 5 - 8 = -3$$

oraz

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 1 + 12 + 6 - (4 + 6 + 3) = 19 - 13 = 6.$$

(d) Korzystając z rozwinięcia Laplace'a względem drugiej wiersza, otrzymujemy

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ = (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-28) = -6 + 84 = 78,$$

gdyż

$$\det \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix} = 0 - 6 + 0 - (0 - 12 + 0) = -6 + 12 = 6$$

oraz

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & -4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 0 - 12 - 8 - (0 + 0 + 8) = -20 - 8 = -28.$$

21.8 Macierze A i B w podpunktach (a) oraz (c) są odwrotne względem siebie. Macierze A i B w podpunktach (b) oraz (d) nie są odwrotne względem siebie, bowiem

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 10 & -18 \end{bmatrix}.$$

21.9 Macierze odwrotne są równe:

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}, & \text{(c)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}, & \text{(e)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}, & \text{(g)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \\ \text{(b)} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, & \text{(d)} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & \text{(f)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}, & \text{(h)} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{array}$$

21.10 (a) Oznaczmy rozważaną przez nas macierz symbolem A. Mamy wtedy

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} = 1 + 0 + 4 - (2 + 0 + 4) = 5 - 6 = -1 \neq 0.$$

Obliczymy teraz dopełnienia algebraiczne macierzy A:

$$\begin{aligned} D_{11} &= (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1, & D_{12} &= (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -2, & D_{13} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1, \\ D_{21} &= (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0, & D_{22} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1, & D_{23} &= (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1, \\ D_{31} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2, & D_{32} &= (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 4, & D_{33} &= (-1)^6 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Zatem

$$A^d = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^d)^T = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Oznaczmy rozważaną przez nas macierz symbolem B. Mamy wtedy

$$\det B = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{matrix} = 8 + 28 - 15 - (-14 + 24 + 10) = 21 - 20 = 1 \neq 0.$$

Obliczmy teraz dopełnienia algebraiczne macierzy B:

$$\begin{aligned} D_{11} &= (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -8, & D_{12} &= (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = 18, & D_{13} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = 1, \\ D_{21} &= (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -5, & D_{22} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = 11, & D_{23} &= (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = 1, \\ D_{31} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 6, & D_{32} &= (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = -13, & D_{33} &= (-1)^6 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Zatem

$$B^d = \begin{bmatrix} -8 & 18 & 1 \\ -5 & 11 & 1 \\ 6 & -13 & -1 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} (B^d)^T = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -8 & 18 & 1 \\ -5 & 11 & 1 \\ 6 & -13 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Oznaczmy rozważaną przez nas macierz symbolem C. Mamy wtedy

$$\det C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} = 3 + 0 + 16 - (18 + 0 + 4) = 19 - 22 = -3 \neq 0.$$

Obliczmy teraz dopełnienia algebraiczne macierzy C:

$$\begin{aligned} D_{11} &= (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3, & D_{12} &= (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -4, & D_{13} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = -1, \\ D_{21} &= (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 3, & D_{22} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -5, & D_{23} &= (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = 1, \\ D_{31} &= (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -6, & D_{32} &= (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = 8, & D_{33} &= (-1)^6 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Zatem

$$C^d = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -1 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} (C^d)^T = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 3 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 4 & 5 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Oznaczmy rozważaną przez nas macierz symbolem D . Mamy wtedy

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 8 - (0 + 0 + 0) = 6 \neq 0.$$

Obliczymy teraz dopełnienia algebraiczne macierzy D :

$$D_{11} = (-1)^2 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -2, \quad D_{12} = (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -4, \quad D_{13} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4,$$

$$D_{21} = (-1)^3 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 4, \quad D_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 2, \quad D_{23} = (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -2,$$

$$D_{31} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2, \quad D_{32} = (-1)^5 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 4, \quad D_{33} = (-1)^6 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -1.$$

Zatem

$$D^d = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} (D^d)^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

21.11 Niech A i B będą takimi macierzami kwadratowymi (tego samego stopnia), że $A \cdot B = I$. Wymnażając lewostronnie tę równość przez macierz B i korzystając z łączności mnożenia macierzy, otrzymujemy $(B \cdot A) \cdot B = B \cdot (A \cdot B) = B \cdot I = B$. Z drugiej strony, skoro $A \cdot B = I$, to $\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B) = \det I = 1$. Oznacza to, że $\det B \neq 0$, a zatem macierz B jest odwracalna. Mnożąc teraz prawostronnie równość $(B \cdot A) \cdot B = B$ przez B^{-1} , dostajemy $(B \cdot A) \cdot B \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1}$ i w konsekwencji $B \cdot A = I$, bo $B \cdot B^{-1} = I$.

21.12 Zauważmy, że z uwagi na łączność mnożenia macierzy mamy $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$. Podobnie można pokazać, że $(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = I$. Wynika z tego, że $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

21.13 (a) Mamy

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Mamy

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Mamy

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 21 & -12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 3 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- B. Gleichgewicht, *Algebra: podręcznik dla kierunków nauczycielskich studiów matematycznych*, PWN, 1983.
- W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, tom 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2008.
- *Matrices: is left inverse also a right inverse?* <https://math.stackexchange.com/questions/470159/matrices-left-inverse-is-also-right-inverse>
- J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2013.