

CAŁKI

TEORIA

FUNKCJE PIERWOTNA ORAZ CAŁKOWALNA. Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f na przedziale $[a, b]$, gdy $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$ (w przypadku krańców przedziału $[a, b]$, tj. punktów a i b , rozważamy tzw. pochodne jednostronne, które różnią się od „zwykłych” pochodnych funkcji tym, że w ich definicji zamiast granicy obustronnej występuje granica jednostronna). Funkcję f , dla której istnieje funkcja pierwotna na przedziale $[a, b]$, nazywamy *całkowalną* na tym przedziale.

UWAGA: Funkcja pierwotna *nie* jest wyznaczona jednoznacznie, tzn. jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $[a, b]$, to funkcja $G(x) = F(x) + C$, gdzie C jest dowolną stałą, jest także funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $[a, b]$, gdyż $G'(x) = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$ dla $x \in [a, b]$.

CAŁKĄ NIEOZNACZONĄ funkcji f nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych tej funkcji i oznaczamy symbolem $\int f(x)dx$.

KLASY FUNKCJI CAŁKOWALNYCH. Funkcje ciągłe (lub ogólniej takie, które mają tylko skończenie wiele punktów nieciągłości) oraz monotoniczne zdefiniowane na przedziale $[a, b]$ są całkowalne. Przykładem funkcji, która nie jest całkowalna (z uwagi na zbyt „duży” zbiór punktów nieciągłości), jest funkcja Dirichleta $\chi_{\mathbb{Q}}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

W dalszym ciągu dla prostoty będziemy zakładać, że rozważamy jedynie funkcje ciągłe.

METODY OBLICZANIA CAŁEK. Dla funkcji f i g całkowalnych na $[a, b]$ oraz $c \in \mathbb{R}$ mamy

- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$
- $\int cf(x)dx = c \cdot \int f(x)dx.$

UWAGA: *Nie* ma wzorów na całkowanie iloczynu i ilorazu funkcji. *Nie* ma również prostego wzoru na całkowanie funkcji złożonych.

Poniżej zebrano podstawowe wzory rachunku całkowego

$$\begin{array}{ll}
 \int a dx = ax + C, \text{ gdzie } a \in \mathbb{R}, & \int \sin x dx = -\cos x + C, \\
 \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ gdzie } \alpha \neq -1, & \int \cos x dx = \sin x + C, \\
 \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, & \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \\
 \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, & \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \\
 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ gdzie } a > 0 \text{ i } a \neq 1, & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \\
 \int e^x dx = e^x + C, & \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C.
 \end{array}$$

CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI. Jeśli funkcje f, g mają pochodne f', g' ciągłe w przedziale $[a, b]$, to

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx.$$

CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE. Niech f będzie funkcją ciągłą określoną na przedziale $[a, b]$ oraz niech g będzie taką funkcją posiadającą ciągłą pochodną na przedziale $[c, d]$, że $g(x) \in [a, b]$ dla $x \in [c, d]$. Wtedy

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt, \quad (*)$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony równości $(*)$ należy w wyniku podstawić $t = g(x)$.

PODSTAWIENIE UNIWERSALNE. W całkach trygonometrycznych możemy również wykorzystać tzw. *podstawienie uniwersalne*. Ponieważ

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}x\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{2}x\right)} \quad \text{oraz} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{2}x\right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{1}{2}x\right)},$$

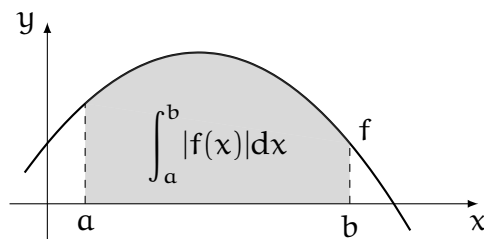
podstawiając $t = \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2}x\right)$, otrzymujemy $x = 2 \arctg t$ oraz $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$, jak również

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{oraz} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

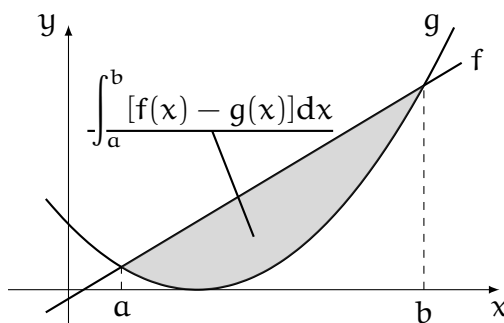
CAŁKA OZNACZONA. Niech F będzie funkcją pierwotną dla funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$. Wówczas *całką oznaczoną* z funkcji f w przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA CAŁKI OZNACZONEJ. Całka oznaczona $\int_a^b |f(x)|dx$ jest polem obszaru ograniczonego wykresem funkcji f , osią OX oraz prostymi $x = a$ i $x = b$.



POLE OBSZARU POMIĘDZY WYKRESAMI FUNKCJI. Pole obszaru ograniczonego z góry wykresem funkcji f , z dołu – wykresem funkcji g oraz prostymi $x = a$ i $x = b$ można obliczyć ze wzoru $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$.



CAŁKI NIEWŁAŚCIWE NA PRZEDZIALE NIESKOŃCZONYM. Załóżmy, że $f: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, T]$. Jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_a^T f(x)dx, \quad (\diamond)$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji f na przedziale $[a, +\infty)$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

a funkcję f nazywamy *całkowalną* na przedziale nieskończonym $[a, +\infty)$; tzw. *punktem osobliwym* jest tutaj $+\infty$. W takim przypadku mówimy również, że całka $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ jest *zbieżna*. Jeżeli granica $(\diamond)$ jest nieskończona, bądź w ogóle nie istnieje, to o całce $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ mówimy, że jest *rozbieżna*.

UWAGA: Analogicznie definiujemy całkę na przedziale $(-\infty, b]$.

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE Z FUNKCJI NIEOGRANICZONEJ. Niech $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją nieograniczoną w pobliżu punktu b , tzn. istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktów z przedziału $[a, b)$ zbieżny do punktu b taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = +\infty$. Załóżmy ponadto, że funkcja f jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale $[a, T]$, gdzie $T \in (a, b)$. Jeżeli istnieje skończona granica

$$\lim_{T \rightarrow b^-} \int_a^T f(x)dx, \quad (\square)$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji f na przedziale $[a, b)$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x) dx,$$

funkcję f nazywamy *całkowalną* w przedziale $[a, b)$, a punkt b nazywamy *punktem osobliwym*. W takim przypadku mówimy również, że całka $\int_a^b f(x) dx$ jest *zbieżna*. Jeżeli granica ($\square$) jest nieskończona, bądź w ogóle nie istnieje, to o całce $\int_a^b f(x) dx$ mówimy, że jest *rozbieżna*.

UWAGA: Analogicznie definiujemy całkę w przypadku przedziału postaci $(a, b]$.

ZADANIA

Zadanie 20.1. Korzystając ze wzorów na całki elementarne oblicz:

$$(a) \int \left(x^3 - 2x^2 + 5 + \frac{1}{x} \right) dx,$$

$$(e) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx,$$

$$(b) \int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx,$$

$$(f) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x},$$

$$(c) \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx,$$

$$(g) \int \sin^2 \left(\frac{1}{2}x \right) dx,$$

$$(d) \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx,$$

$$(h) \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

Zadanie 20.2. Korzystając ze wzorów na całkowanie przez części lub przez podstawienie oblicz:

$$(a) \int \sin \frac{x}{2} dx,$$

$$(g) \int \frac{\ln x}{x} dx,$$

$$(m) \int \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

$$(b) \int e^{-3x} dx,$$

$$(h) \int \frac{x}{x^2 + 1} dx,$$

$$(n) \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx,$$

$$(c) \int \frac{dx}{\cos^2 5x},$$

$$(i) \int x^2 \cos x dx,$$

$$(o) \int x^3 e^{-x} dx,$$

$$(d) \int (3 - 2x)^5 dx,$$

$$(j) \int \operatorname{ctg} x dx,$$

$$(p) \int e^x \sin x dx,$$

$$(e) \int x \ln x dx,$$

$$(k) \int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx,$$

$$(q) \int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx.$$

$$(f) \int \ln x dx,$$

$$(l) \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx,$$

Zadanie 20.3. Sprowadzając następujące całki do całek postaci $\int \frac{dx}{1+x^2}$ oraz $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ oblicz:

- | | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| (a) $\int \frac{dx}{9+x^2},$ | (d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^4}},$ | (g) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5},$ |
| (b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}},$ | (e) $\int \frac{5x-2}{x^2+4} dx,$ | (h) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}},$ |
| (c) $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4},$ | (f) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx,$ | (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}.$ |

Zadanie 20.4. Oblicz następujące całki funkcji wymiernych:

- | | | |
|----------------------------------|--|---|
| (a) $\int \frac{dx}{x^2-25},$ | (f) $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)} dx,$ | (k) $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx,$ |
| (b) $\int \frac{x^3}{x^8-1} dx,$ | (g) $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx,$ | (l) $\int \frac{dx}{x^2-2x},$ |
| (c) $\int \frac{x^3}{x-2} dx,$ | (h) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx,$ | (m) $\int \frac{dx}{x^4-x^2},$ |
| (d) $\int \frac{x^4}{x^2+9} dx,$ | (i) $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx,$ | (n) $\int \frac{dx}{x^4-1}.$ |
| (e) $\int \frac{x^5}{x^3-8} dx,$ | (j) $\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx,$ | |

Zadanie 20.5. Oblicz następujące całki trygonometryczne:

- | | | |
|----------------------------------|--|--|
| (a) $\int \sin^2(3x) dx,$ | (e) $\int \sin^5 x dx,$ | (i) $\int \sin(3x) \cos x dx,$ |
| (b) $\int (1+2 \cos x)^2 dx,$ | (f) $\int \cos^4 x dx,$ | (j) $\int \cos(5x) \cos(7x) dx,$ |
| (c) $\int \sin^2 x \cos^3 x dx,$ | (g) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx,$ | (k) $\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx,$ |
| (d) $\int \sin^2 x \cos^2 x dx,$ | (h) $\int \frac{dx}{\sin(2x)},$ | (l) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx.$ |

Zadanie 20.6. Oblicz pola obszarów ograniczone krzywymi o równaniach

- | | |
|---------------------------------------|---|
| (a) $f(x) = x$ i $g(x) = x^2,$ | (f) $f(x) = x - x^2$ i $g(x) = 2x^2 - 2x$ |
| (b) $f(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{x},$ | (g) $f(x) = x^2$ i $g(x) = 4x - x^2,$ |
| (c) $f(x) = x^3$ i $g(x) = 4x,$ | (h) $f(x) = 2 - 2x^2$ i $g(x) = x^2 - 1,$ |
| (d) $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3,$ | (i) $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \frac{2}{\pi}x$ dla $x \geq 0,$ |
| (e) $f(x) = -x^2 + 4x$ i $g(x) = x,$ | (j) $f(x) = \sin 2x$ i $g(x) = \sin x$ na $[0, \frac{\pi}{3}].$ |

Zadanie 20.7. Oblicz następujące całki niewłaściwe:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}},$ | (e) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2},$ | (i) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx,$ |
| (b) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}},$ | (f) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$ | (j) $\int_0^{+\infty} x \sin x dx,$ |
| (c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4},$ | (g) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ | (k) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx,$ |
| (d) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}},$ | (h) $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}},$ | (l) $\int_{-\infty}^0 \frac{2x}{x^2+1} dx.$ |

Zadanie 20.8. Prawdopodobieństwo, że cząstka gazu o temperaturze T ma prędkość v dane jest rozkładem Maxwella o gęstości

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad \text{dla } v > 0,$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna, a m – masą cząsteczki gazu. Znaleźć prędkość średnią cząstki

$$v_{sr} = \int_0^{+\infty} v f(v) dv.$$

UWAGA: Matematycznie prędkość średnia cząstki jest wartością oczekiwaną rozkładu (prawdopodobieństwa) Maxwella.

ODPOWIEDZI

20.1 Korzystając ze wzorów na całki elementarne mamy:

- (a) $\int \left(x^3 - 2x^2 + 5 + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x + \ln|x| + C,$
- (b) $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx = \int (10x^4 + 3x^{-4}) dx = 2x^5 - x^{-3} + C,$
- (c) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{4}}) dx = 2x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{1}{4}} + C,$
- (d) $\int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx = \int (e^x - x^{-2}) dx = e^x + \frac{1}{x} + C,$
- (e) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C,$
- (f) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C,$
- (g) $\int \sin^2 \left(\frac{1}{2}x \right) dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos x \right) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sin x + C,$
- (h) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int 1 dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$

20.2 (a) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\int \sin \frac{x}{2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}x \\ dt = \frac{1}{2}dx \end{array} \right\} = \int 2 \sin t dt = -2 \cos t = -2 \cos \frac{x}{2} + C.$$

(b) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\int e^{-3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = -3x \\ dt = -3dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t = -\frac{1}{3} e^{-3x} + C.$$

(c) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x} = \left\{ \begin{array}{l} t = 5x \\ dt = 5dx \end{array} \right\} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{5} \operatorname{tg} t = \frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x + C.$$

(d) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\int (3-2x)^5 dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 3-2x \\ dt = -2dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = -\frac{1}{12} t^6 = -\frac{1}{12} (3-2x)^6 + C.$$

(e) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części mamy:

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = x & g(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C. \end{aligned}$$

(f) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części mamy:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = 1 & g(x) = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

(g) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

(h) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln|t| = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

(i) Korzystając dwa razy ze wzoru na całkowanie przez części mamy:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \\ g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x \quad g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.\end{aligned}$$

(j) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln|t| = \ln|\sin x| + C.$$

(k) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części mamy:

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \\ g'(x) = x \quad g(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} \, dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.\end{aligned}$$

(l) Korzystając dwukrotnie ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} \, dx &= \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = \sin x \quad y = \cos x \\ dt = \cos x \, dx \quad dy = -\sin x \, dx \end{array} \right\} = \int \frac{1}{t} \, dt + \int \frac{1}{y} \, dy \\ &= \ln|t| + \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

(m) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części mamy:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) = \frac{1}{x^2} \quad g(x) = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{1}{x} \ln x + \int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C.$$

(n) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2} \, dx \end{array} \right\} = - \int e^t \, dt = -e^t = -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

(o) Korzystając trzykrotnie ze wzoru na całkowanie przez części mamy:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \\ g'(x) = e^{-x} \quad g(x) = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 e^{-x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \\ g'(x) = e^{-x} \quad g(x) = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6 \int x e^{-x} dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) = e^{-x} \quad g(x) = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} + 6 \int e^{-x} dx \\ &= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} - 6e^{-x} + C.\end{aligned}$$

(p) Korzystając dwukrotnie ze wzoru na całkowanie przez części mamy:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \\ g'(x) = \sin x \quad g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x \quad g(x) = \sin x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.\end{aligned}$$

Stąd

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

(q) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części oraz całkowanie przez podstawienie mamy:

$$\begin{aligned}\int \arctg x dx &= \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \arctg x \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ g'(x) = 1 \quad g(x) = x \end{array} \right\} = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right\} = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln|t| \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

20.3 (a) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{3})^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{3} \\ dt = \frac{1}{3} dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3} \arctg t = \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + C.$$

(b) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{2} \\ dt = \frac{1}{2} dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

(c) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4} = \frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{(\frac{x^3}{2})^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x^3}{2} \\ dt = \frac{3}{2} x^2 dx \end{array} \right\} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{6} \arctg t = \frac{1}{6} \arctg \frac{x^3}{2} + C.$$

(d) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{3 - x^4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - (\frac{x^2}{\sqrt{3}})^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x^2}{\sqrt{3}} \\ dt = \frac{2}{\sqrt{3}} x dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ = \frac{1}{2} \arcsin t = \frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C.$$

(e) Korzystając dwukrotnie ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \frac{5x - 2}{x^2 + 4} dx = \int \frac{5x dx}{x^2 + 4} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(\frac{x}{2})^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{ll} y = x^2 + 4 & t = \frac{x}{2} \\ dy = 2x dx & dt = \frac{1}{2} dx \end{array} \right\} \\ = \frac{5}{2} \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{5}{2} \ln|y| - \arctg t = \frac{5}{2} \ln(x^2 + 4) - \arctg \frac{x}{2} + C.$$

(f) Mamy

$$\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int 1 dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - \arctg x + C.$$

(g) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} t = x + 2 \\ dt = 1 dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctg t = \arctg(x + 2) + C.$$

(h) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x+1}{2})^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x + 1) \\ dt = \frac{1}{2} dx \end{array} \right\} \\ = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t = \arcsin \frac{1}{2}(x + 1) + C.$$

(i) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x-2}{2})^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2}(x - 2) \\ dt = \frac{1}{2} dx \end{array} \right\} \\ = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t = \arcsin \frac{1}{2}(x - 2) + C.$$

20.4 (a) Ponieważ

$$\frac{1}{x^2 - 25} = \frac{\frac{1}{10}}{x - 5} + \frac{-\frac{1}{10}}{x + 5},$$

więc

$$\int \frac{dx}{x^2 - 25} = \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x - 5} - \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x + 5} = \frac{1}{10} \ln|x - 5| - \frac{1}{10} \ln|x + 5| = \frac{1}{10} \ln \left| \frac{x - 5}{x + 5} \right| + C.$$

(b) Korzystając z całkowania przez postawienie mamy

$$\int \frac{x^3}{x^8 - 1} dx = \int \frac{x^3}{(x^4)^2 - 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^4 \\ dt = 4x^3 dx \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

Ale

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{t - 1} + \frac{-\frac{1}{2}}{t + 1}.$$

Stąd

$$\int \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 1} = \frac{1}{2} \ln|t - 1| - \frac{1}{2} \ln|t + 1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right|,$$

a zatem

$$\int \frac{x^3}{x^8 - 1} dx = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1} \right| + C.$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{x - 2} dx &= \int \frac{x^3 - 8 + 8}{x - 2} dx = \int \frac{(x - 2)(x^2 + 3x + 4)}{x - 2} dx + \int \frac{8}{x - 2} dx \\ &= \int (x^2 + 3x + 4) dx + 8 \int \frac{dx}{x - 2} = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 4x + 8 \ln|x - 2| + C. \end{aligned}$$

(d) Korzystając ze wzoru na całowanie przez podstawienie mamy

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx &= \int \frac{x^4 - 81 + 81}{x^2 + 9} dx = \int \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 9)}{x^2 + 9} dx + \int \frac{81 dx}{x^2 + 81} \\ &= \int (x^2 - 9) dx + 9 \int \frac{dx}{1 + (\frac{x}{3})^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{3} \\ dt = \frac{1}{3} dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 27 \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 9x + 27 \arctg t = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 27 \arctg \frac{x}{3} + C. \end{aligned}$$

(e) Mamy

$$\int \frac{x^5}{x^3 - 8} dx = \int \frac{x^2(x^3 - 8) + 8x^2}{x^3 - 8} dx = \int x^2 dx + \frac{8}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 - 8} dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{8}{3} \ln|x^3 - 8| + C.$$

(f) Ponieważ

$$\frac{x - 4}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{2}{x - 2} + \frac{-1}{x - 3},$$

więc

$$\int \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 3)} dx = \int \frac{2}{x - 2} dx - \int \frac{dx}{x - 3} = 2 \ln|x - 2| - \ln|x - 3| = \ln \frac{(x - 2)^2}{|x - 3|} + C.$$

(g) Ponieważ

$$\frac{2x+7}{x^2+x-2} = \frac{3}{x-1} + \frac{-1}{x+2},$$

więc

$$\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx = 3 \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+2} = 3 \ln|x-1| - \ln|x+2| = \ln \frac{|x-1|^3}{|x+2|} + C.$$

(h) Zauważmy, że $(x+1)^3 - 1 = x[(x+1)^2 + (x+1) + 1] = x(x^2 + 3x + 3)$. Stąd

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx = \int \frac{(x+1)^3 - 1 + 1}{x(x-1)} dx = \int \frac{x^2 + 3x + 3}{x-1} dx + \int \frac{dx}{x(x-1)}.$$

Dla uproszczenia wprowadźmy następujące oznaczenia

$$I_1 := \int \frac{x^2 + 3x + 3}{x-1} dx \quad \text{oraz} \quad I_2 := \int \frac{dx}{x(x-1)}.$$

Obliczymy teraz całkę I_1 . Mamy

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x^2 - x + 4x + 3}{x-1} dx = \int \frac{x(x-1)}{x-1} dx + \int \frac{4x-4+7}{x-1} dx = \int x dx + 4 \int \frac{dx}{x-1} + 7 \int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 4x + 7 \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

Przejdziemy teraz do obliczenia całki I_2 . Ponieważ

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1},$$

więc

$$I_2 = - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + \ln|x-1| + C.$$

Zatem

$$\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x} dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 8 \ln|x-1| - \ln|x| = \frac{1}{2}x^2 + 4x + \ln \frac{|x-1|^8}{|x|} + C.$$

(i) Zauważmy, że $x^3 - 3x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$. Ponieważ

$$\frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2},$$

więc

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \ln|x| + \ln|x-1| + \frac{2}{x-1} = \ln|x(x-1)| + \frac{2}{x-1} + C. \end{aligned}$$

(j) Zauważmy, że $x^3 + x^2 + 4x + 4 = x^2(x+1) + 4(x+1) = (x+1)(x^2+4)$. Ponieważ

$$\frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{x+1} + \frac{x}{x^2+4},$$

więc

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx &= \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) \\ &= \ln(|x+1|\sqrt{x^2+4}) + C. \end{aligned}$$

(k) Ponieważ

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1},$$

więc

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx &= -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \\ &= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= -\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} - \frac{1}{x+1} + \arctg x + C. \end{aligned}$$

(l) Ponieważ

$$\frac{1}{x^2-2x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2},$$

więc

$$\int \frac{dx}{x^2-2x} = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-2| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C.$$

(m) Zauważmy, że $x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x^2(x-1)(x+1)$ oraz

$$\frac{1}{x^4 - x^2} = \frac{0}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

(n) Zauważmy, że $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x-1)(x+1)(x^2 + 1)$ oraz

$$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 - 1} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctg x = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

20.5 (a) Korzystając z tożsamości $\sin^2 3x = \frac{1}{2}(1 - \cos 6x)$ oraz ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\begin{aligned} \int \sin^2(3x) dx &= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 6x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 6x \\ dt = 6dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \int \cos t dt \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \sin t = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \sin 6x + C. \end{aligned}$$

(b) Korzystając z tożsamości $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ oraz wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\begin{aligned}\int (1 + 2 \cos x)^2 dx &= \int (1 + 4 \cos x + 4 \cos^2 x) dx = \int dx + 4 \int \cos x dx + 2 \int dx + 2 \int \cos 2x dx \\ &= \left. \begin{matrix} t = 2x \\ dt = 2dx \end{matrix} \right\} = 3x + 4 \sin x + \int \cos t dt = 3x + 4 \sin x + \sin t \\ &= 3x + 4 \sin x + \sin 2x + C.\end{aligned}$$

(c) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x dx &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \left. \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right\} = \int t^2 (1 - t^2) dt \\ &= \int (t^2 - t^4) dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{5} t^5 = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.\end{aligned}$$

(d) Korzystając z tożsamości $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ oraz $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$ a także całkowania przez podstawienie mamy

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \left. \begin{matrix} t = 4x \\ dt = 4dx \end{matrix} \right\} \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \int \cos t dt = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin t = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

(e) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części oraz całkowanie przez podstawienie mamy

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x dx &= \left. \begin{matrix} f(x) = \sin^4 x & f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{matrix} \right\} = -\sin^4 x \cos x + 4 \int \sin^3 x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^4 x \cos x + 4 \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx = \left. \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right\} \\ &= -\sin^4 x \cos x - 4 \int (1 - t^2) t^2 dt = -\sin^4 x \cos x - 4 \int (t^2 - t^4) dt \\ &= -\sin^4 x \cos x - \frac{4}{3} t^3 + \frac{4}{5} t^5 = -\sin^4 x \cos x - \frac{4}{3} \cos^3 x + \frac{4}{5} \cos^5 x + C.\end{aligned}$$

(f) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez części oraz podpunktu (d) mamy

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \left. \begin{matrix} f(x) = \cos^3 x & f'(x) = -3 \cos^2 x \sin x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{matrix} \right\} = \sin x \cos^3 x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= \sin x \cos^3 x - \frac{3}{32} \sin 4x + \frac{3}{8} x + C.\end{aligned}$$

(g) Korzystając ze wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x}{\sin^2 x} dx = \left. \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right\} \int \frac{1 - t^2}{t^2} dt \\ &= \int (t^{-2} - 1) dt = -\frac{1}{t} - t = -\sin x - \frac{1}{\sin x} + C.\end{aligned}$$

(h) Korzystając z tożsamości $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin(2x)} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|\cos x| + \frac{1}{2} \ln|\sin x| = \frac{1}{2} \ln|\tan x| + C.\end{aligned}$$

(i) Korzystając ze wzoru na sumę sinusów oraz wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \sin 3x \cos x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

(j) Korzystając ze wzoru na sumę cosinusów oraz wzoru na całkowanie przez podstawienie mamy

$$\int \cos 5x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 12x + \cos 2x) dx = \frac{1}{24} \sin 12x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

(k) Korzystając z podstawienia uniwersalnego $t = \tan \frac{x}{2}$ mamy

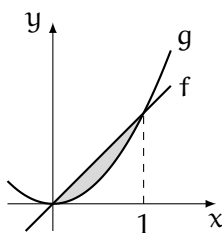
$$\begin{aligned}\int \frac{2 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx &= \int \frac{t^2 + t + 1}{t} dt = \int (t + t^{-1} + 1) dt = \frac{1}{2} t^2 + \ln|t| + t \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 \frac{x}{2} + \tan \frac{x}{2} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.\end{aligned}$$

(l) Korzystając z podstawienia uniwersalnego $t = \tan \frac{x}{2}$ mamy

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1 - t^2}{1 + t^2} dt = - \int \frac{t^2 + 1 - 2}{t^2 + 1} dt = - \int dt + 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= -t + 2 \arctan t = -\tan \frac{x}{2} + 2 \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \right) = x - \tan \frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

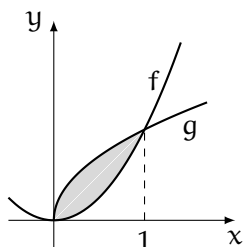
20.6 (a) Porównując wzory funkcji f i g , wyznaczmy punkty przecięcia tych krzywych. Mamy $x = x^2$, czyli $x(x - 1) = 0$. Krzywe f i g przecinają się więc w punktach o odciętych $x = 0$ oraz $x = 1$. Stąd pole obszaru ograniczonego tymi krzywymi wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$



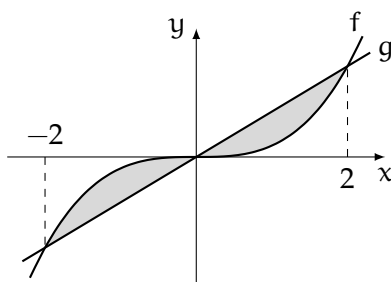
(b) Zaczniemy od wyznaczenia punktów przecięcia krzywych o równaniach $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$. Równanie $x^2 = \sqrt{x}$ równoważne jest równaniu $x^4 - x = 0$, skąd wynika, że $x(x^3 - 1) = 0$. Zatem krzywe f oraz g przecinają się w punktach o odciętych $x = 0$ oraz $x = 1$. Stąd pole rozważanego obszaru wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$



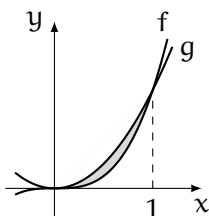
(c) Zaczniemy od wyznaczenia punktów przecięcia krzywych $f(x) = x^3$ oraz $g(x) = 4x$. Równanie $4x = x^3$ równoważne jest równaniu $x(x^2 - 4) = 0$, skąd wynika, że krzywe f oraz g przecinają się w punktach o odciętych $x = -2$, $x = 0$ oraz $x = 2$. Ponieważ obszar ograniczony krzywymi f i g jest środkowo symetryczny względem punktu $(0,0)$, jego pole wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = 2 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 2 \left[2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^2 = 8.$$



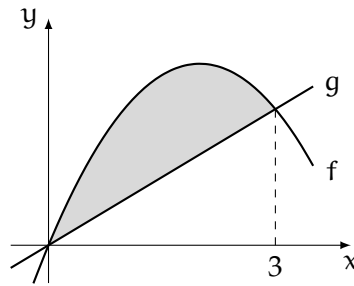
(d) Zaczniemy od wyznaczenia punktów przecięcia krzywych $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = x^3$. Równanie $x^2 = x^3$ równoważne jest równaniu $x^2(x - 1) = 0$, skąd wynika, że krzywe f oraz g przecinają się w punktach o odciętych $x = 0$ oraz $x = 1$. Stąd pole obszaru ograniczonego krzywymi f i g wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$



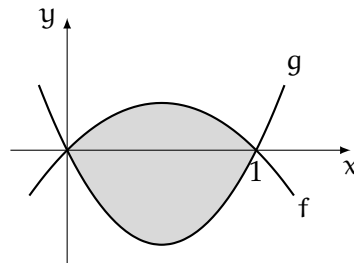
(e) Zaczniemy od wyznaczenia punktów przecięcia krzywych $f(x) = -x^2 + 4x$ oraz $g(x) = x$. Równanie $-x^2 + 4x = x$ równoważne jest równaniu $x^2 - 3x = 0$, czyli $x(x - 3) = 0$. Zatem krzywe f oraz g przecinają się w punktach o odciętych $x = 0$ oraz $x = 3$. Stąd pole obszaru ograniczonego krzywymi f i g wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = \int_0^3 (-x^2 + 4x - x) dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = -\frac{1}{3} \cdot 27 + \frac{3}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}.$$



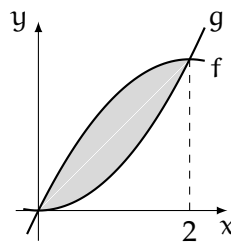
(f) Zaczniemy od wyznaczenia punktów przecięcia krzywych $f(x) = x - x^2$ oraz $g(x) = 2x^2 - 2x$. Równanie $x - x^2 = 2x^2 - 2x$ równoważne jest równaniu $3x^2 - 3x = 0$, czyli $x(x - 1) = 0$. Zatem krzywe f oraz g przecinają się w punktach o odciętych $x = 0$ oraz $x = 1$. Stąd pole obszaru ograniczonego krzywymi f i g wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = \int_0^1 (x - x^2 - 2x^2 + 2x) dx = \int_0^1 (3x - 3x^2) dx = \left[-\frac{3}{2}x^2 - x^3 \right]_0^1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$



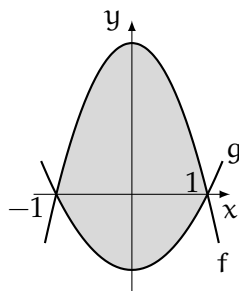
(g) Zaczniemy od wyznaczenia punktów przecięcia krzywych $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = 4x - x^2$. Równanie $x^2 = 4x - x^2$ równoważne jest równaniu $4x - 2x^2 = 0$, czyli $2x(x - 2) = 0$. Zatem krzywe f oraz g przecinają się w punktach o odciętych $x = 0$ oraz $x = 2$. Stąd pole obszaru ograniczonego krzywymi f i g wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = \int_0^2 (4x - x^2 - x^2) dx = \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}.$$



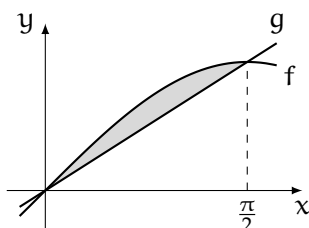
(h) Zaczniemy od wyznaczenia punktów przecięcia krzywych $f(x) = 2 - 2x^2$ oraz $g(x) = x^2 - 1$. Równanie $2 - 2x^2 = x^2 - 1$ równoważne jest równaniu $x^2 - 1 = 0$, czyli $(x + 1)(x - 1) = 0$. Zatem krzywe f oraz g przecinają się w punktach o odciętych $x = -1$ oraz $x = 1$. Stąd pole obszaru ograniczonego krzywymi f i g wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = \int_{-1}^1 (2 - 2x^2 - x^2 + 1) dx = \int_{-1}^1 (3 - 3x^2) dx = \left[3x - x^3 \right]_{-1}^1 = (3 - 1) - (-3 + 1) = 4.$$



(i) Zauważmy, że funkcje $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = \frac{2}{\pi}x$ przecinają się w punktach o odciętych $x = 0$ oraz $x = \frac{\pi}{2}$. A zatem pole obszaru ograniczonego krzywymi f i g wynosi (por. rysunek poniżej)

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x \right) dx = \left[-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} + 1 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$



(j) Wyznamy punkty przecięcia funkcji $f(x) = \sin 2x$ oraz $g(x) = \sin x$ leżące w przedziale $[0, \frac{\pi}{3}]$. Równanie $\sin 2x = \sin x$ jest równoważne równaniu $\sin x(2 \cos x - 1) = 0$. Skąd otrzymujemy $x = 0$ oraz $x = \frac{\pi}{3}$.

sinus i kosinus przecinają się w dwóch punktach o odciętych równych $x = 0$ i $x = \frac{\pi}{3}$. Zatem pole obszaru ograniczonego krzywymi f i g wynosi (por. rysunek poniżej)

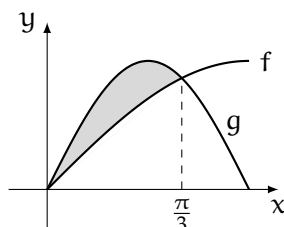
$$P = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx.$$

Ponieważ

$$\int \sin 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 2x \\ dt = 2 dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t = -\frac{1}{2} \cos 2x + C,$$

mamy

$$P = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(\cos \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} \right) - \left(\cos 0 - \frac{1}{2} \cos 0 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$



20.7 (a) Ponieważ dla dowolnego $T \in (0, 1)$ mamy

$$\int_T^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_T^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_T^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot T^{\frac{2}{3}},$$

więc

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{T \rightarrow 0^+} \int_T^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{T \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot T^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2}.$$

(b) Ponieważ dla dowolnego $T \in (0, 16)$ mamy

$$\int_T^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \int_T^{16} x^{-\frac{3}{4}} dx = \left[4x^{\frac{1}{4}} \right]_T^{16} = 8 - 4T^{\frac{1}{4}},$$

więc

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{T \rightarrow 0^+} \int_T^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim_{T \rightarrow 0^+} (8 - 4T^{\frac{1}{4}}) = 8.$$

(c) Ponieważ dla dowolnego $T > 1$ mamy

$$\int_1^T \frac{dx}{x^4} = \int_1^T x^{-4} dx = \left[-\frac{1}{3} x^{-3} \right]_1^T = \frac{1}{3} - \frac{1}{3T^3},$$

więc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dx}{x^4} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3T^3} \right) = \frac{1}{3}.$$

(d) Ponieważ dla dowolnego $T > 1$ mamy

$$\int_1^T \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_1^T x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_1^T = 2T^{\frac{1}{2}} - 2,$$

więc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_1^T \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} (2T^{\frac{1}{2}} - 2) = +\infty.$$

(e) Ponieważ dla dowolnego $T \in (0, 1)$ mamy

$$\int_T^1 \frac{dx}{x^2} = \int_T^1 x^{-2} dx = \left[-x^{-1} \right]_T^1 = T^{-1} - 1,$$

więc

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{T \rightarrow 0^+} \int_T^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{T \rightarrow 0^+} (T^{-1} - 1) = +\infty.$$

(f) Ponieważ

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1-x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + C,$$

więc

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{T \rightarrow 1^-} \int_0^T \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{T \rightarrow 1^-} [-\sqrt{1-x^2}]_0^T = \lim_{T \rightarrow 1^-} (1 - \sqrt{1-T^2}) = 1.$$

(g) Ponieważ dla dowolnego $T < 0$ mamy

$$\int_T^0 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctg x]_T^0 = -\arctg T,$$

więc

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{T \rightarrow -\infty} \int_T^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{T \rightarrow -\infty} (-\arctg T) = \frac{\pi}{2}.$$

(h) Ponieważ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+3x \\ dt = 3dx \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{1+3x} + C,$$

więc

$$\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} = \lim_{T \rightarrow -\frac{1}{3}^+} \int_T^0 \frac{dx}{\sqrt{1+3x}} = \lim_{T \rightarrow -\frac{1}{3}^+} \left[\frac{2}{3} \sqrt{1+3x} \right]_T^0 = \lim_{T \rightarrow -\frac{1}{3}^+} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{1+3T} \right) = \frac{2}{3}.$$

(i) Ponieważ

$$\int x e^{-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x dx \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C,$$

więc

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T x e^{-x^2} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-T^2} \right) = \frac{1}{2}.$$

(j) Ponieważ

$$\int x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C,$$

więc dla dowolnego $T > 0$ mamy

$$\int_0^T x \sin x dx = [-x \cos x + \sin x]_0^T = -T \cos T + \sin T.$$

Zauważmy jednak, że granica

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (-T \cos T + \sin T)$$

nie istnieje. Istotnie dla $\xi_n = 2n\pi$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\xi_n \cos \xi_n + \sin \xi_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n\pi) = -\infty,$$

podczas gdy dla $\eta_n = \pi + 2n\pi$ mamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\eta_n \cos \eta_n + \sin \eta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\pi + 2n\pi) = +\infty.$$

Tym samym stwierdzamy, że całka niewłaściwa

$$\int_0^{+\infty} x \sin x dx$$

jest rozbieżna.

(k) Ponieważ

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = e^{-x} & f'(x) = -e^{-x} \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{array} \right\} = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} f(x) = e^{-x} & f'(x) = -e^{-x} \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{array} \right\} = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x - \int e^{-x} \sin x dx, \end{aligned}$$

więc

$$\int e^{-x} \sin x dx = -e^{-x}(\cos x + \sin x) - \int e^{-x} \sin x dx.$$

Stąd

$$\int e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) + C.$$

A zatem

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-x} \sin x dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x) \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-T}(\cos T + \sin T) \right] = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

gdyż

$$0 \leq \lim_{T \rightarrow +\infty} |e^{-T}(\cos T + \sin T)| \leq 2 \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-T} = 0.$$

(1) Zauważmy, że $(x^2 + 1)' = 2x$, a więc dla dowolnego $T < 0$ mamy

$$\int_T^0 \frac{2x}{x^2 + 1} dx = [\ln(x^2 + 1)]_T^0 = -\ln(T^2 + 1).$$

Jednakże

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} -\ln(T^2 + 1) = -\infty,$$

co dowodzi, że całka niewłaściwa

$$\int_{-\infty}^0 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

jest rozbieżna.

20.8 Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$A = \frac{m}{2kT} \quad \text{oraz} \quad B = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Wtedy

$$f(v) = Bv^2 e^{-Av^2} \quad \text{dla } v \geq 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \int v f(v) dv &= \int Bv^3 e^{-Av^2} dv = \left\{ \begin{array}{l} t = -Av^2 \\ dt = -2Av dv \end{array} \right\} = \frac{B}{2A^2} \int t e^t dt \\ &= \left\{ \begin{array}{l} g(t) = t \\ h'(t) = e^t \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} g'(t) = 1 \\ h(t) = e^t \end{array} \right\} = \frac{B}{2A^2} t e^t - \frac{B}{2A^2} \int e^t dt = \frac{B}{2A^2} e^t (t - 1) \\ &= -\frac{B}{2A^2} e^{-Av^2} (Av^2 + 1) + C. \end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} v f(v) dv &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T v f(v) dv = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{B}{2A^2} e^{-Av^2} (Av^2 + 1) \right]_0^T \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{B}{2A^2} - \frac{B}{2A^2} e^{-AT^2} (AT^2 + 1) \right] = \frac{B}{2A^2}, \end{aligned}$$

gdyż

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{AT^2 + 1}{e^{AT^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{2AT}{2ATe^{AT^2}} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{AT^2}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

symbolem H oznaczyliśmy równość wynikającą z reguły de l'Hospitala. Tym samym średnia prędkość cząstki wynosi

$$v_{\text{sr}} = \frac{B}{2A^2} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{4k^2T^2}{2m^2} = \sqrt{\frac{8kT}{m\pi}}.$$

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 2*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.
- B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1979.
- W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- H. Musielak, J. Musielak, *Analiza matematyczna, tom 1*, Wydawnictwo Naukowe UAM, 1993.
- W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, 1976.
- J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2013.
- A. Sołtysiak, *Analiza matematyczna, część 1*, Wydawnictwo Naukowe UAM, 2009.
- J. Stewart, *Essential calculus*, ThomsonBrooks/Cole, 2007.
- D. G. Zill, *Calculus with analytic geometry*, PWS Publishers, 1985.