

POCHODNE

TEORIA

POCHODNA FUNKCJI. Niech funkcja f będzie określona w przedziale otwartym zawierającym punkt a . *Pochodną funkcji f w punkcie a nazywamy skończoną granicę (jeżeli istnieje)*

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

O funkcji, która ma pochodną w punkcie a mówimy również, że jest ona *różniczkowalna* w punkcie a .

FUNKCJA RÓŻNICZKOWALNA NA PRZEDZIALE (a, b) . Jeżeli funkcja f ma pochodną w dowolnym punkcie przedziału (a, b) , to mówimy, że jest ona różniczkowalna na przedziale (a, b) .

POCHODNĄ FUNKCJI f , różniczkowalnej na przedziale (a, b) , nazywamy funkcję f' , która punktom $x \in (a, b)$ przyporządkowuje wartość pochodnej w tych punktach tj. $f'(x)$.

POCHODNE WYŻSZYCH RZĘDÓW. Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna na pewnym przedziale. Jeżeli jej pochodna f' też jest różniczkowalna, to pochodną pochodnej, czyli $(f')'$, nazywamy *drugą pochodną* (lub *pochodną rzędu drugiego*) funkcji f i oznaczamy symbolem f'' .

Pochodną trzeciego rzędu z funkcji f definiujemy jako pochodną z drugiej pochodnej $(f'')'$ i oznaczamy f''' ; do oznaczenia pochodnej trzeciego rzędu funkcji f używamy również oznaczenia $f^{(3)}$. Opisaną procedurę możemy kontynuować, otrzymując pochodne wyższych rzędów $f^{(n)}$.

ZWIĄZEK RÓŻNICZKOWALNOŚCI I CIĄGŁOŚCI FUNKCJI. Jeżeli funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $c \in (a, b)$, to jest w tym punkcie ciągła. Odwrotna implikacja nie zachodzi; funkcja $x \mapsto |x|$ jest ciągła w punkcie $c = 0$, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

Przykładem funkcji, która jest ciągła i nieróżniczkowalna w żadnym punkcie jest tzw. *funkcja Weierstrassa* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

gdzie $a \in (0, 1)$, b jest liczbą całkowitą nieparzystą oraz $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI I. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale (a, b) .

- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest rosnąca w przedziale (a, b) .
- Jeżeli $f'(x) = 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest funkcją stałą w przedziale (a, b) .
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to funkcja f jest malejąca w przedziale (a, b) .

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI II. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale (a, b) .

- Funkcja f jest niemalejąca w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b)$.
- Funkcja f jest nierosnąca w (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x) \leq 0$ dla $x \in (a, b)$.

EKSTREMA LOKALNE. Mówimy, że funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ osiąga w punkcie $c \in (a, b)$

- *maksimum lokalne*, gdy dla wszystkich x należących do pewnego przedziału otwartego zawierającego punktu c zachodzi $f(c) \geq f(x)$,
- *minimum lokalne*, gdy dla wszystkich x należących do pewnego przedziału otwartego zawierającego punktu c zachodzi $f(c) \leq f(x)$.

WARUNEK KONIECZNY ISTNIENIA EKSTREMUM LOKALNEGO. Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale (a, b) . Jeżeli f ma w punkcie $c \in (a, b)$ ekstremum lokalne, to $f'(c) = 0$.

Okazuje się jednak, że warunek konieczny istnienia ekstremum *nie* jest warunkiem wystarczającym. Istotnie, funkcja $f(x) = x^3$ spełnia warunek konieczny w punkcie $c = 0$, gdyż $f'(x) = 3x^2$, lecz w punkcie $c = 0$ funkcja f nie ma ekstremum lokalnego.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY ISTNIENIA EKSTREMUM LOKALNEGO 1. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w pewnym przedziale otwartym zawierającym c oraz niech $f'(c) = 0$. W punkcie c funkcja f ma

- minimum lokalne, gdy istnieje takie $\delta > 0$, że $f'(x) < 0$ dla $x \in (c - \delta, c)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in (c, c + \delta)$,
- maksimum lokalne, gdy istnieje takie $\delta > 0$, że $f'(x) > 0$ dla $x \in (c - \delta, c)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (c, c + \delta)$.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY ISTNIENIA EKSTREMUM LOKALNEGO 2. Niech f będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną w pewnym przedziale otwartym zawierającym c oraz niech $f'(c) = 0$.

- Jeżeli $f''(c) > 0$, to funkcja f ma w punkcie c minimum lokalne.
- Jeżeli $f''(c) < 0$, to funkcja f ma w punkcie c maksimum lokalne.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY ISTNIENIA EKSTREMUM LOKALNEGO 3. Niech f będzie funkcją n -krotnie różniczkowalną w pewnym przedziale otwartym zawierającym c . Ponadto niech $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ oraz $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- Gdy n jest liczbą nieparzystą, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie c .
- Gdy n jest liczbą parzystą, to funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie c , przy czym jeżeli $f^{(n)}(c) < 0$, jest to maksimum, a jeżeli $f^{(n)}(c) > 0$, jest to minimum.

REGUŁA DE L'HOSPITALA. Niech f i g będą funkcjami różniczkowalnymi na przedziale (a, b) oraz niech $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a, b)$. Jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty,$$

to

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pod warunkiem, że granica po prawej stronie istnieje.

UWAGA. Regułę de l'Hospitala można sformułować również dla granic lewostronnych, obu-stronnych i granic w nieskończonościach.

(FORMALNYM) SZEREGIEM POTĘGOWYM nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

Liczby rzeczywiste a_n , gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, nazywamy *współczynnikami* tego szeregu, a punkt c jego *środkiem*. Słowo „formalny” oznacza, że abstrahujemy od tego, czy dla danej wartości zmiennej x szereg ten jest zbieżny czy rozbieżny. (Zauważmy, że dla konkretnej wartości x szereg potęgowy staje się „zwykłym” szeregiem liczbowym, więc pytanie o jego zbieżność jest zupełnie naturalne.)

PROMIEŃ ZBIEŻNOŚCI. Jeżeli dla danego szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ istnieje granica $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, to *promieniem zbieżności* tego szeregu nazywamy liczbę

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \text{jeżeli } \alpha \in (0, +\infty), \\ +\infty, & \text{jeżeli } \alpha = 0, \\ 0, & \text{jeżeli } \alpha = +\infty. \end{cases}$$

UWAGA: W niektórych przypadkach promień zbieżności łatwiej wyznaczyć obliczając wielkość α ze wzoru $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

ZBIEŻNOŚĆ SZEREGÓW POTĘGOWYCH. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $R > 0$. Wtedy dla każdego $x \in (c - R, c + R)$ szeregi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x-c|^n$$

(traktowane jako szeregi liczbowe) są zbieżne.

RÓŻNICZKOWANIE SZEREGÓW POTĘGOWYCH WYRAZ PO WYRAZIE. Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ będzie szeregiem potęgowym o promieniu zbieżności $R > 0$. Wtedy dla każdego $x \in (c - R, c + R)$ mamy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-c)^{n-1}.$$

SZEREGIEM TAYLORA (czyt. tejlora) funkcji f nazywamy szereg potęgowy postaci

$$f(c) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n,$$

gdzie $f^{(n)}$ oznacza pochodną n -tego rzędu funkcji f . W przypadku gdy $c = 0$, szereg Taylora nazywa się *szeregiem Maclaurina* (czyt. maklorena).

UWAGA: O funkcji f dla której w każdym punkcie x z jej dziedziny suma jej szeregu Taylora jest równa wartości funkcji w tym punkcie, tj. wynosi $f(x)$ mówimy, że jest rozwijalna w szereg Taylora o dodatnim promieniu zbieżności. Nie każda funkcja, która posiada pochodne dowolnego rzędu, jest rozwijalna w szereg Taylora (jej szereg może nie być zbieżny w pewnych punktach x z dziedziny funkcji lub nawet jeśli jest zbieżny, to jego suma nie musi być równa $f(x)$). Funkcje, które są rozwijalne w szereg Taylora nazywamy *funkcjami analitycznymi*.

METODY OBLICZANIA POCHODNYCH. Jeżeli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x , to

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x),$
- $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x),$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$
- $\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0.$

Ponadto, jeżeli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x , a funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $g(x)$, to

- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$

Poniżej zebrano pochodne podstawowych funkcji.

$f(x)$	$f'(x)$	Uwagi	$f(x)$	$f'(x)$	Uwagi
c	0	$c \in \mathbb{R}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1, x > 0$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
x	1		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$		$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
e^x	e^x		$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x$	$\cos x$				
$\cos x$	$-\sin x$				

ZADANIA

Zadanie 19.1. Oblicz z definicji pochodną funkcji f w punkcie a , jeżeli

- (a) $f(x) = 3x - 1$ i $a = 2$, (b) $f(x) = x^2$ i $a = 1$, (c) $f(x) = \sin x$ i $a = 0$.

Zadanie 19.2. Oblicz pochodne sum oraz różnic funkcji:

- (a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - x + 2$, (g) $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 4x^5 - 12x^2 + 8x + 2$,
 (b) $f(x) = -5x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, (h) $f(x) = \frac{4}{3}x^6 - 3x^4 + 10x^2 - 7x - 2$,
 (c) $f(x) = -3x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 6x - 1$, (i) $f(x) = -4\sqrt[3]{x} + \frac{12}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x^5}$,
 (d) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 4x^2 + 7x + 2$, (j) $f(x) = 2\sqrt[3]{x} - \frac{5}{6}\sqrt[5]{x^3} - 2\sqrt{x^3}$,
 (e) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^4 + 9x^2 + 1$, (k) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x^{-3} + \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$,
 (f) $f(x) = -\frac{1}{5}x^5 + 4x^3 - x + 5$, (l) $f(x) = 4\sqrt[4]{x} + x^{-2} - \frac{1}{4}\sqrt[5]{x^4}$.

Zadanie 19.3. Oblicz pochodne iloczynów funkcji:

- (a) $f(x) = x \sin x$, (e) $f(x) = \cos x \cdot \ln x$,
 (b) $f(x) = x \cos x$, (f) $f(x) = \sin x \cdot \ln x$,
 (c) $f(x) = \sin x \cos x$, (g) $f(x) = x^3 \ln x$,
 (d) $f(x) = e^x \sin x$, (h) $f(x) = x^2 e^x$.

Zadanie 19.4. Oblicz pochodne ilorazów funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{10}{x^2 + 1},$$

$$(f) f(x) = \frac{1 + 3x}{x^2 - 2x - 1},$$

$$(b) f(x) = \frac{5}{x^2 - 1},$$

$$(g) f(x) = \frac{e^x}{x + 1},$$

$$(c) f(x) = \frac{3x + 1}{5 - 2x},$$

$$(h) f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

$$(d) f(x) = \frac{2 - 3x}{2x - 1},$$

$$(i) f(x) = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$(e) f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 2},$$

$$(j) f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Zadanie 19.5. Oblicz pochodne funkcji złożonych:

$$(a) f(x) = (1 - 7x)^6,$$

$$(k) f(x) = \sqrt{\sin x},$$

$$(b) f(x) = (5x - 2)^7,$$

$$(l) f(x) = \sqrt{\cos x},$$

$$(c) f(x) = (3x^2 - 1)^{100}$$

$$(m) f(x) = -2 \cos^3 x,$$

$$(d) f(x) = (2x^3 + 1)^{100},$$

$$(n) f(x) = 3 \sin^2 x,$$

$$(e) f(x) = e^{3x^2},$$

$$(o) f(x) = \ln(\ln x),$$

$$(f) f(x) = e^{-2x^3},$$

$$(p) f(x) = \ln(\sin x),$$

$$(g) f(x) = e^{-\cos x},$$

$$(q) f(x) = \ln(\cos x),$$

$$(h) f(x) = e^{\sin x},$$

$$(r) f(x) = \ln \frac{1}{x},$$

$$(i) f(x) = \sqrt{9 - x^2},$$

$$(s) f(x) = 4 \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(2\sqrt{x}),$$

$$(j) f(x) = \sqrt{x^2 + 7},$$

$$(t) f(x) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(4\sqrt{x}).$$

Zadanie 19.6. Oblicz pochodne poniższych funkcji:

$$(a) f(x) = x^{5x},$$

$$(b) f(x) = x^{\sin x},$$

$$(c) f(x) = x^{\frac{1}{x}},$$

$$(d) f(x) = x^{e^x}.$$

Zadanie 19.7. Oblicz pochodne pierwszego oraz drugiego rzędu poniższych funkcji:

$$(a) f(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 7,$$

$$(d) f(x) = e^x \cos x,$$

$$(b) f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 8x - 3,$$

$$(e) f(x) = 2 \ln(x^3 + 1),$$

$$(c) f(x) = e^x \sin x,$$

$$(f) f(x) = -3 \ln(1 - x^2).$$

Zadanie 19.8. Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą M taką, że dla każdego trójkianu kwadratowego f spełniającego warunek $|f(x)| \leq 1$ dla $x \in [0, 1]$ mamy $f'(0) \leq M$.

Zadanie 19.9. Zbadaj monotoniczność funkcji f w oparciu o analizę znaku pochodnej:

(a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - 6x + 2,$

(f) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ dla $x \neq 0,$

(b) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x + 5,$

(g) $f(x) = -\frac{x}{1+x^2},$

(c) $f(x) = 1 - 24x + 15x^2 - 2x^3,$

(h) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2},$

(d) $f(x) = -3 + 15x + 6x^2 - x^3,$

(i) $f(x) = \ln(x^2 + 1),$

(e) $f(x) = x - \frac{4}{x}$ dla $x \neq 0,$

(j) $f(x) = x^2 e^x.$

Zadanie 19.10. Wykaż, że dla wszystkich $x > 0$ zachodzi nierówność $\arctg x < x$.

Zadanie 19.11. Wyznacz ekstrema lokalne poniższych funkcji:

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{3},$

(g) $f(x) = -x \ln x$ dla $x > 0,$

(b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2,$

(h) $f(x) = x - 2 \arctg x,$

(c) $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x - 2,$

(i) $f(x) = x e^x,$

(d) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3,$

(e) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$ dla $x \neq 0,$

(j) $f(x) = e^{-x^2},$

(f) $f(x) = \frac{x^3}{1-x^3}$ dla $x \neq 1,$

(k) $f(x) = (7+x) \cdot \sqrt[3]{3x-11}.$

Zadanie 19.12. Wyznaczyć maksimum lokalne funkcji danej wzorem $f(x) = x^{-x}$ dla $x > 0$.

Zadanie 19.13. Znaleźć parametr m tak, by funkcja $f(x) = x^3 - mx^2 + 5x - 2$ osiągała minimum lokalne w punkcie o odciętej $x = 5$.

Zadanie 19.14. Niech P będzie takim wielomianem stopnia $n \geq 1$, że $P(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Wykazać, że wtedy $u(x) := P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(n)}(x) \geq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 19.15. Prawdopodobieństwo, że cząstka gazu o temperaturze T ma prędkość v dane jest rozkładem Maxwella o gęstości

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad \text{dla } v > 0,$$

gdzie k jest stałą Boltzmanna, a m – masą cząsteczki gazu. Znaleźć prędkość najbardziej prawdopodobną (tj. taką dla której f osiąga maksimum globalne).

Zadanie 19.16. Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz następujące granice

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x},$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x,$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x},$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x},$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1),$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\cos}{1 - \sin x},$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x)}{\ln(6x)},$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x},$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x},$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{x^2},$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2},$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 4x)^{\operatorname{ctg} x},$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{4x} + x}{e^{4x} + 3x},$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} \frac{1}{2}x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Zadanie 19.17. Pokaż, że do obliczenia granicy $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$ nie można wykorzystać reguły de l'Hospitala. Oblicz tę granicę.

Zadanie 19.18. Wyznacz promień zbieżności następujących szeregów potęgowych:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} 10^n x^n,$$

$$(f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n},$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n},$$

$$(g) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n,$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 5^n},$$

$$(h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n,$$

$$(d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n+1} x^n,$$

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n(2n-1)} (x-1)^n,$$

$$(e) \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n,$$

$$(j) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^5}{(n+1)!} (x+5)^n.$$

Zadanie 19.19. Podać szereg szeregu Maclaurina funkcji f .

- | | | |
|-------------------------|---------------------------|------------------------|
| (a) $f(x) = e^x$, | (d) $f(x) = \ln(x+1)$, | (g) $f(x) = \cos x$, |
| (b) $f(x) = e^{-x}$, | (e) $f(x) = \sqrt{x+1}$, | (h) $f(x) = \sinh x$, |
| (c) $f(x) = e^{-x^2}$, | (f) $f(x) = \sin x$, | (i) $f(x) = \cosh x$. |

UWAGA: Funkcja *sinus hiperboliczny* zdefiniowana jest wzorem $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, natomiast funkcja *kosinus hiperboliczny* dana jest wzorem $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Zadanie 19.20. Podać szereg Taylora w otoczeniu punktu c funkcji f , jeżeli

- | | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) $f(x) = \frac{1}{x}$ i $c = 3$, | (b) $f(x) = x\sqrt{x}$ i $c = 1$, | (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i $c = 1$. |
|--------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|

Zadanie 19.21. Korzystając z różniczkowania szeregów potęgowych wyraz po wyrazie wyznacz szereg Maclaurina funkcji

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| (a) $f(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}$, | (b) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$, | (c) $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$. |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|

ODPOWIEDZI

19.1 (a) $f'(2) = 6$ (b) $f'(1) = 2$ (c) $f'(0) = 1$ **19.2** (a) $12x^2 + 6x - 1$ (b) $-15x^2 - 6x + 2$ (c) $-15x^4 - 8x^3 + 4x - 6$
 (d) $10x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 8x + 7$ (e) $x^4 - 12x^3 + 18x$ (f) $-x^4 + 12x^2 - 1$ (g) $-4x^5 + 20x^4 - 24x + 8$
 (h) $8x^5 - 12x^3 + 20x - 7$ (i) $-\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{6}} + 5x^{\frac{3}{2}}$ (j) $\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{2}}$ (k) $x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-4} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{4}}$
 (l) $x^{-\frac{3}{4}} - 2x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-\frac{1}{5}}$ **19.3** (a) $\sin x + x \cos x$ (b) $\cos x - x \sin x$ (c) $\cos^2 x - \sin^2 x$ (d) $e^x \sin x + e^x \cos x$
 (e) $x^{-1} \cos x - \sin x \cdot \ln x$ (f) $x^{-1} \sin x + \cos x \cdot \ln x$ (g) $x^2 + 3x^2 \ln x$ (h) $2xe^x + x^2e^x$ **19.4** (a) $-\frac{20x}{(x^2+1)^2}$
 (b) $-\frac{10x}{(x^2-1)^2}$ (c) $\frac{17}{(5-2x)^2}$ (d) $-\frac{1}{(2x-1)^2}$ (e) $-\frac{2x^2+2x-2}{(x^2+2x+2)^2}$ (f) $-\frac{3x^2+2x+1}{(x^2-2x-1)^2}$ (g) $\frac{xe^x}{(x+1)^2}$ (h) $\frac{1-\ln x}{x^2}$ (i) $-\frac{1}{\sin^2 x}$
 (j) $\frac{1}{\cos^2 x}$ **19.5** (a) $f'(x) = -42(1-7x)^5$ (b) $35(5x-2)^6$ (c) $600x(3x^2-1)^{99}$ (d) $600x^2(2x^3+1)^{99}$
 (e) $6xe^{3x^2}$ (f) $-6x^2e^{-2x^3}$ (g) $\sin x e^{-\cos x}$ (h) $\cos x e^{\sin x}$ (i) $-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ (j) $\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$ (k) $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (l) $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$
 (m) $6 \sin x \cos^2 x$ (n) $6 \sin x \cos x$ (o) $\frac{1}{x \ln x}$ (p) $\frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$ (q) $-\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$ (r) $-\frac{1}{x}$ (s) $-\frac{4}{\sqrt{x}(4x+1)}$
 (t) $\frac{4}{\sqrt{x}(16x+1)}$ **19.6** (a) $5x^{5x}(1 + \ln x)$ (b) $x^{-1+\sin x}(\sin x + x \ln x \cos x)$ (c) $-x^{\frac{1}{2}-2}(-1 + \ln x)$
 (d) $e^x x^{e^x-1}(1 + x \ln x)$ **19.7** (a) $f'(x) = 9x^2 - 10x + 1$, $f''(x) = 18x - 10$ (b) $f'(x) = -6x^2 + 8x + 8$,
 $f''(x) = -12x + 8$ (c) $f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$, $f''(x) = 2e^x \cos x$ (d) $f'(x) = e^x \cos x - e^x \sin x$,
 $f''(x) = -2e^x \sin x$ (e) $f'(x) = \frac{6x^2}{x^3+1}$, $f''(x) = \frac{12x-6x^4}{(x^3+1)^2}$ (f) $f'(x) = \frac{6x}{1-x^2}$, $f''(x) = \frac{6x^2+6}{(1-x^2)^2}$ **19.8** Niech
 $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$. Wtedy $f(0) = c$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c$ oraz $f(1) = a + b + c$.
 Ponadto $f'(x) = 2ax + b$ i $f'(0) = b$. Zauważmy, że $f'(0)$ można zapisać jako $f'(0) = 4(\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c) - (a + b + c) - 3c = 4f(\frac{1}{2}) - f(1) - 3f(0)$. Jeżeli $|f(x)| \leq 1$ dla $x \in [0, 1]$, to $f'(0) \leq |f'(0)| \leq 4|f(\frac{1}{2})| + |f(1)| + 3|f(0)| \leq 8$. (Skorzystaliśmy tutaj z nierówności trójkąta dla wartości bezwzględnej $|x \pm y| \leq |x| + |y|$ prawdziwej dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$.) Zauważmy również, że trójmian kwadratowy
 $f(x) = -8x^2 + 8x + 1$ spełnia warunek $|f(x)| \leq 1$ dla $x \in [0, 1]$ oraz $f'(0) = 8$. Oznacza to, że $M = 8$.
19.9 (a) Na przedziale $(-\infty, -3)$ funkcja f jest rosnąca, na przedziale $(-3, 1)$ funkcja f jest malejąca, a na przedziale $(1, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca. (b) Na przedziale $(-\infty, -2)$ funkcja f jest rosnąca, na przedziale $(-2, 1)$ funkcja f jest malejąca, a na przedziale $(1, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca. (c) Na przedziale $(-\infty, 1)$ funkcja f jest malejąca, na przedziale $(1, 4)$ funkcja f jest rosnąca, a na przedziale $(4, +\infty)$

funkcja f jest malejąca. (d) Na przedziale $(-\infty, -1)$ funkcja f jest malejąca, na przedziale $(-1, 5)$ funkcja f jest rosnąca, a na przedziale $(5, +\infty)$ funkcja f jest malejąca. (e) Na przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja f jest rosnąca; na przedziale $(0, +\infty)$ funkcja f jest również rosnąca. (f) Na przedziale $(-\infty, -1)$ funkcja f jest rosnąca, na przedziale $(-1, 0)$ funkcja f jest malejąca, na przedziale $(0, 1)$ funkcja f jest malejąca, a na przedziale $(1, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca. (g) Na przedziale $(-\infty, -1)$ funkcja f jest rosnąca, na przedziale $(-1, 1)$ funkcja f jest malejąca, a na przedziale $(1, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca. (h) Na przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja f jest malejąca, a na przedziale $(0, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca. (i) Na przedziale $(-\infty, 0)$ funkcja f jest malejąca, a na przedziale $(0, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca. (j) Na przedziale $(-\infty, -2)$ funkcja f jest rosnąca, na przedziale $(-2, 0)$ funkcja f jest malejąca, a na przedziale $(0, +\infty)$ funkcja f jest rosnąca. **19.10** Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = \arctg x - x$. Jej pochodna wyraża się wzorem $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Zauważmy również, że dla wszystkich $x > 0$ mamy $f'(x) < 0$, co oznacza, że funkcja f jest malejąca na przedziale $[0, +\infty)$. Zatem $f(0) > f(x)$ dla każdego $x > 0$. Ale $f(0) = 0$. Stąd $\arctg x > x$ dla $x > 0$. **19.11** (a) W punkcie $x = -1$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(-1) = \frac{3}{2}$, a w punkcie $x = 2$ funkcja f osiąga minimum lokalne $f(2) = -3$. (b) W punkcie $x = -3$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(-3) = 11$, a w punkcie $x = 1$ funkcja f osiąga minimum lokalne $f(1) = \frac{1}{3}$. (c) W punkcie $x = -3$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(-3) = -29$, a w punkcie $x = -2$ funkcja f osiąga minimum lokalne $f(-2) = -30$. (d) W punkcie $x = 1$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(1) = 2$, a w punkcie $x = 2$ funkcja f osiąga minimum lokalne $f(2) = 1$. (e) W punkcie $x = -2$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(-2) = -3$. (f) Funkcja nie ma ekstremów lokalnych. (g) W punkcie $x = e^{-1}$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(e^{-1}) = e^{-1}$. (h) W punkcie $x = -1$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(-1) = \frac{1}{2}(\pi - 2)$, a w punkcie $x = 1$ funkcja f osiąga minimum lokalne $f(1) = 1 - \frac{1}{2}\pi$. (i) W punkcie $x = -1$ funkcja f osiąga minimum lokalne $f(-1) = -e^{-1}$. (j) W punkcie $x = 0$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(0) = 1$. (k) W punkcie $x = 1$ funkcja f osiąga minimum lokalne $f(1) = -16$. **19.12** W punkcie $x = e^{-1}$ funkcja f osiąga maksimum lokalne $f(e^{-1}) = e^{e^{-1}}$. **19.13** $m = 8$ **19.14** Zauważmy, że funkcja u jest wielomianem stopnia n , którego składnik wiodący, tzn. ten postaci $a_n x^n$, jest taki sam jak składnik wiodący wielomianu P . Skoro $P(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, oznacza to, że $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) \geq +\infty$. A zatem by udowodnić, że $u(x) \geq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, wystarczy pokazać, że wszystkie minima lokalne wielomianu u są nieujemne. Niech więc u osiąga minimum lokalne w punkcie x_0 . Wtedy $u'(x_0) = 0$. A ponadto $u(x) = P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(n)}(x) = P(x) + u'(x)$, bowiem $P^{(n+1)}(x) = 0$. Stąd $u(x_0) = P(x_0) + u'(x_0) = P(x_0) \geq 0$. To kończy dowód. **19.15** Prędkość najbardziej prawdopodobna ma wartość $\sqrt{2kTm^{-1}}$. **19.16** (a) 2 (b) 2 (c) 0 (d) $+\infty$ (e) 1 (f) 0 (g) 0 (h) -8 (i) $\frac{1}{2}$ (j) 2 (k) 0 (l) 1 (m) 1 (n) $+\infty$ (o) 1 (p) 1 (q) e^3 (r) e^{-1} (s) e^4 (t) e **19.17** Gdybyśmy chcieli zastosować regułę de l'Hospitala do granicy $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, to (nie biorąc pod uwagę założeń tego twierdzenia) mielibyśmy $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; literą H oznaczyliśmy tutaj zastosowanie reguły de l'Hospitala. Z drugiej strony mamy jednak $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-1/x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{1-1/x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1-1/x}}{x} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1-1/x}}{x} = -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-1/x} = -1$, gdzie równość $(*)$ zachodzi, bowiem $x \rightarrow -\infty$ i w związku z tym $|x| = -x$. **19.18** (a) $R = \frac{1}{10}$ (b) $R = 3$ (c) $R = 5$ (d) $R = \frac{1}{2}$ (e) $R = 0$ (f) $R = +\infty$ (g) $+\infty$ (h) $\frac{1}{4}$ (i) $R = 2$ (j) $R = +\infty$ **19.19** (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) x^n$, gdzie $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$; gdy $n = 0$ przyjmujemy $\binom{\alpha}{n} = 1$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ **19.20** (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} (x-3)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right) (x-3)^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right) (x-3)^n$ **19.21** (a) $-\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^n(n+1)(n+2)x^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)x^{2n}$

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- *Ekstremum funkcji*, https://pl.wikipedia.org/wiki/Ekstremum_funkcji
- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 1*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.
- B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1979.
- W. Kołodziej, *Analiza matematyczna*, PWN, 1978.
- W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- H. Musielak, J. Musielak, *Analiza matematyczna, tom 1*, Wydawnictwo Naukowe UAM, 1993.
- *Różniczkowanie i całkowanie szeregów potęgowych*, <http://prac.im.pwr.wroc.pl/~kajetano/AM2/infseries/infseries-5.html>
- W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, 1976.
- J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2013.
- A. Sołtysiak, *Analiza matematyczna, część 1*, Wydawnictwo Naukowe UAM, 2009.
- J. Stewart, *Essential calculus*, ThomsonBrooks/Cole, 2007.
- *Weierstrass function*, https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function
- D. G. Zill, *Calculus with analytic geometry*, PWS Publishers, 1985.