

GRANICA FUNKCJI

TEORIA

GRANICA LEWOSTRONNA FUNKCJI W PUNKCIE (DEFINICJA CAUCHY'EGO). Funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie b lewostronną granicę

- $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = g$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in (a, b)$ takich, że $b - \delta < x < b$,
- $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) > M$ dla każdego $x \in (a, b)$ takiego, że $b - \delta < x < b$,
- $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) < -M$ dla każdego $x \in (a, b)$ takiego, że $b - \delta < x < b$.

GRANICA PRAWOSTRONNA FUNKCJI W PUNKCIE (DEFINICJA CAUCHY'EGO). Funkcja $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie a prawostronną granicę

- $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in (a, b)$ takich, że $a < x < a + \delta$,
- $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) > M$ dla każdego $x \in (a, b)$ takiego, że $a < x < a + \delta$,
- $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) < -M$ dla każdego $x \in (a, b)$ takiego, że $a < x < a + \delta$.

GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE (DEFINICJA CAUCHY'EGO). Funkcja $f: (a, c) \cup (c, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w punkcie c granicę

- $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = g$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ takich, że $|x - c| < \delta$,
- $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) > M$ dla każdego $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ takiego, że $|x - c| < \delta$,
- $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taką liczbę $\delta > 0$, że $f(x) < -M$ dla każdego $x \in (a, b) \setminus \{c\}$ takiego, że $|x - c| < \delta$.

GRANICA FUNKCJI W $+\infty$ (DEFINICJA CAUCHY'EGO). Funkcja $f: (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w $+\infty$ granicę

- $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $x > M$,
- $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, jeżeli dla każdego $K > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że $f(x) > K$ dla wszystkich $x > M$,
- $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, jeżeli dla każdego $K > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że $f(x) < -K$ dla wszystkich $x > M$.

GRANICA FUNKCJI W $-\infty$ (DEFINICJA CAUCHY'EGO). Funkcja $f: (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ma w $-\infty$ granicę

- $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że $|f(x) - g| < \varepsilon$ dla wszystkich $x < -M$,
- $+\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, jeżeli dla każdego $K > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że $f(x) > K$ dla wszystkich $x < -M$,
- $-\infty$, co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, jeżeli dla każdego $K > 0$ istnieje taka liczba $M > 0$, że $f(x) < -K$ dla wszystkich $x < -M$.

OTOCZENIEM punktu $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nazwiemy

- przedział (a, b) taki, że $c \in (a, b)$, jeżeli $c \in \mathbb{R}$,
- przedział $(-\infty, b)$, jeżeli $c = -\infty$,
- przedział $(a, +\infty)$, jeżeli $c = +\infty$.

GRANICA FUNKCJI (DEFINICJA HEINEGO). Niech O_c będzie otoczeniem punktu $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Powiemy, że $g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ jest *granicą* funkcji $f: O_c \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie c , co zapisujemy $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = g$, jeżeli dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o elementach należących do zbioru $O_c \setminus \{c\}$ takiego, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$, mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$.

Jeżeli w definicji granicy Heinego założymy, że $c \in \mathbb{R}$ i będziemy rozważać jedynie ciągi $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, których wyrazy są mniejsze od c , tzn. $x_n \in (a, c)$ dla $n \in \mathbb{N}$, to otrzymamy definicję *granicy lewostronnej* w punkcie c . Podobnie, jeżeli $x_n \in (c, b)$ dla $n \in \mathbb{N}$, to otrzymamy definicję *granicy prawostronnej* w punkcie c .

DEFINICJA CAUCHY'EGO VS. DEFINICJA HEINEGO. Definicje Cauchy'ego oraz Heinego granicy są równoważne, tzn. jeżeli funkcja spełnia jedną z nich, to spełnia także i drugą. Dlatego też w poszczególnych sytuacjach możemy korzystać z tej definicji, która jest łatwiejsza w użyciu.

GRANICA FUNKCJI W PUNKCIE VS. GRANICE JEDNOSTRONNE. Funkcja $f: (a, c) \cup (c, b) \rightarrow \mathbb{R}$ posiada w punkcie c granicę $g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy posiada w tym punkcie obie granice jednostronne, które dodatkowo są równe tzn. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = g$ oraz $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = g$.

DZIAŁANIA ARYTMETYCZNE NA GRANICACH. Jeżeli funkcje $f_1, f_2: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $c \in (a, b)$ mają odpowiednio granice (skończone) g_1 i g_2 , tzn. $\lim_{x \rightarrow c} f_1(x) = g_1$ i $\lim_{x \rightarrow c} f_2(x) = g_2$, to

- $\lim_{x \rightarrow c} (f_1 + f_2)(x) = g_1 + g_2,$
- $\lim_{x \rightarrow c} (f_1 \cdot f_2)(x) = g_1 \cdot g_2,$
- $\lim_{x \rightarrow c} (f_1 - f_2)(x) = g_1 - g_2,$
- $\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f_1}{f_2} \right)(x) = \frac{g_1}{g_2},$ o ile $g_2 \neq 0.$

UWAGA: Powyższe twierdzenie jest również prawdziwe w przypadku granic jednostronnych oraz granic w nieskończonościach.

SYMBOLE NIEOZNACZONE. Podobnie jak w przypadku ciągów, w powyższym twierdzeniu ograniczyliśmy się do skończonych granic funkcji z uwagi na możliwość wystąpienia *symboli nieoznaczonych*. Przypomnijmy, że symbolami nieoznaczonymi są: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0.$

WAŻNE GRANICE 1. Poniżej zebrano podstawowe granice funkcji w punkcie:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty,$ gdy $a \in (0, 1),$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty,$ gdy $a > 1,$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty,$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}.$

WAŻNE GRANICE 2. Poniżej zebrano podstawowe granice funkcji w nieskończonościach:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty,$ gdy $a > 1,$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0,$ gdy $a > 1,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0,$ gdy $a \in (0, 1),$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty,$ gdy $a \in (0, 1),$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty,$ gdy $a > 1,$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty,$ gdy $a \in (0, 1),$
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}.$

CIAŁOŚĆ FUNKCJI. Funkcję $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *ciągłą w punkcie* $c \in (a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jeden z poniższych równoważnych warunków

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$,
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$,
- dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ dla każdego punktu $x \in (a, b)$ takiego, że $|x - c| < \delta$,
- dla każdego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach z przedziału (a, b) zbieżnego do punktu c ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do $f(c)$.

Funkcję $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *ciągłą*, jeżeli jest ona ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Okazuje się, że funkcje elementarne (tzn. wielomiany, funkcje trygonometryczne, funkcja potęgowa, funkcje wykładnicza i logarytmiczna) są ciągłe w swoich dziedzinach naturalnych.

DZIAŁANIA ARYTMETYCZNE NA FUNKCJACH CIĄGŁYCH. Jeżeli funkcje $f_1, f_2: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe w punkcie $c \in (a, b)$, to w tym punkcie są ciągłe również funkcje $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 \cdot f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, przy czym ostatnia przy założeniu, że $f_2(c) \neq 0$.

ZŁOŻENIE FUNKCJI CIĄGŁYCH. Jeżeli funkcje $f_1: (a, b) \rightarrow (c, d)$ oraz $f_2: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe, to ciągłe jest również ich złożenie $f_2 \circ f_1: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

ZADANIA

Zadanie 18.1. Korzystając z definicji Cauchy'ego granicy funkcji pokaż, że

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty,$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{3x+5} = 2,$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x+1} = -1,$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty.$$

Zadanie 18.2. Oblicz następujące granice jednostronne funkcji w punkcie:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x-2}{3x^2+1},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-4}{x-2},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x+2}{6-x^2},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3+1}{x+1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3x}{\sqrt{x+1}+1},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{8+x^3}{2+x},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{5+2x}-1}{2x},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x^2},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9-x^2}{3-x},$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1},$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3},$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x},$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 5x + 4},$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x}{2 - \sqrt{x+4}},$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}},$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 25} - 5},$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + 5x)^{\frac{1}{x}},$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3 - \sqrt{x^2 + 9}},$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{2}x^2\right)^{-\frac{4}{x^2}},$$

$$(u) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x+1}}{2 - \sqrt{x+4}},$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 10x^2)^{\frac{1}{5x^2}},$$

$$(v) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x^2+9}}.$$

Zadanie 18.3. Oblicz poniższe granice jednostronne funkcji trygonometrycznych w punkcie:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{3x},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 6x}{\sin 2x},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{\sin 2x},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 4x},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{tg} 5x}{2x},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{ctg} 9x}{\operatorname{ctg} 3x},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6x}{\operatorname{tg} 3x},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x}.$$

Zadanie 18.4. Oblicz następujące granice jednostronne funkcji w punkcie, jeśli $n, m \in \mathbb{N}$.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^n - 1}{x - 1},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+nx} - 1}{x},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + mx)^{\frac{n}{x}}.$$

Zadanie 18.5. Oblicz następujące granice jednostronne funkcji w punkcie:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{|x|}{x}\right),$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + [x]),$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{|x|}{x}\right),$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + [x]),$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Zadanie 18.6. Oblicz następujące granice funkcji w nieskończoności:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 - 3x + 1},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 2x - 3}{-2x^3 - 4x^2 + x},$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1},$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3 + x^2}{2x^2 + x + 5},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^3 - 2x^2 - x - 1}{2x^3 + x - 3},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x^2 - 3x + 1}{-5x^2 + x - 1},$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+1}),$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x-2} \right)^{4x},$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{7+x} - \sqrt{2+x}),$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2+2} - 2x),$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+4} \right)^{x+2},$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2-7} - 3x),$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-6} \right)^{x+1},$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^x,$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2} \right)^{4x^2+2x-1},$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{x} \right)^x,$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2} \right)^{3x^2-2x+4}.$$

Zadanie 18.7. Sprawdź, czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie c , jeżeli:

$$(a) \ c = 5 \text{ i } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & \text{dla } x < 5, \\ 10 & \text{dla } x \geq 5, \end{cases}$$

$$(d) \ c = 1 \text{ i } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x^3}{|x-1|} & \text{dla } x \neq 1, \\ -1 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

$$(b) \ c = 1 \text{ i } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{dla } x \neq 1, \\ 1 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$$

$$(e) \ c = 1 \text{ i } f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{dla } x \leq 1, \\ |x-1| & \text{dla } x > 1, \end{cases}$$

$$(c) \ c = 0 \text{ i } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{dla } x \neq 0, \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

$$(f) \ c = 0 \text{ i } f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0. \end{cases}$$

Zadanie 18.8. Wyznacz wartość parametrów a, b , dla której funkcja f będzie ciągła na całej prostej $\mathbb{R}$, jeżeli:

$$(a) \ f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & \text{dla } x < -1, \\ a(x+2) & \text{dla } x \geq -1, \end{cases}$$

$$(d) \ f(x) = \begin{cases} -2x & \text{dla } x < -1, \\ b(x-a)^2 & \text{dla } -1 \leq x < 5, \\ 8 & \text{dla } x \geq 5, \end{cases}$$

$$(b) \ f(x) = \begin{cases} ax^2+2x & \text{dla } x < 2, \\ x^3+ax & \text{dla } x \geq 2, \end{cases}$$

$$(e) \ f(x) = \begin{cases} 2+e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x < 0, \\ a & \text{dla } x = 0, \\ \frac{\sin bx}{x} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

$$(c) \ f(x) = \begin{cases} 2x^2-a^2 & \text{dla } x < 4, \\ ax+20 & \text{dla } x \geq 4, \end{cases}$$

Zadanie 18.9. Znajdź funkcje $f_1, f_2: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ nieciągłe w punkcie $c = 1$, których suma $f_1 + f_2$ jest ciągła na całym przedziale $(0, 2)$.

Zadanie 18.10. Pokaż, że funkcja Dirichleta $\chi_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

jest nieciągła w każdym punkcie dziedziny.

Zadanie 18.11. Pokaż, że funkcja Riemanna $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q} \text{ i } x \text{ jest ułamkiem nieskracalnym } \frac{p}{q}, \text{ gdzie } p \in \mathbb{Z} \text{ i } q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

jest ciągła w punktach niewymiernych i nieciągła w punktach wymiernych.

ODPOWIEDZI

18.1 (a) Dla dowolnie ustalonego $M > 0$ weźmy $\delta < \frac{1}{M}$. Wówczas dla każdego x takiego, że $1 - \delta < x < 1$, mamy $f(x) = \frac{1}{1-x} > \frac{1}{\delta} > M$. To pokazuje, że $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$. (b) Dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ weźmy $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$. Wówczas dla wszystkich x takich, że $0 < x < \delta$, mamy $|f(x) - (-1)| = \left| \frac{x-1}{x+1} + 1 \right| = \frac{2x}{x+1} < \frac{2\delta}{1} < \varepsilon$. To pokazuje, że $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x+1} = -1$. (c) Dla dowolnie ustalonego $\varepsilon > 0$ weźmy $M > \frac{5}{3\varepsilon}$. Wtedy dla x takich, że $x > M$, mamy $|f(x) - 2| = \left| \frac{6x}{3x+5} - 2 \right| = \frac{5}{3x+2} < \frac{5}{3x} < \varepsilon$. To pokazuje, że $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{3x+5} = 2$. (d) Dla dowolnie ustalonego $M > 0$ weźmy $K < -\frac{1}{2}\sqrt{M}$. Wówczas dla x takich, że $x < K < -\frac{1}{2}\sqrt{M}$, mamy $x^2 > \frac{1}{4}M$. Stąd $f(x) = 4x^2 > M$. To pokazuje, że $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$. **18.2** (a) 0 (b) 6 (c) 3 (d) $\frac{1}{2}$ (e) 6 (f) 4 (g) 1 (h) 12 (i) $-\infty$ (j) $-\infty$ (k) 2 (l) $\frac{5}{3}$ (m) e^{-3} (n) e^5 (o) e^{-2} (p) e^{-2} (q) $\frac{1}{2}$ (r) -12 (s) 5 (t) $\frac{3}{2}$ (u) 2 (v) -3 **18.3** (a) $\frac{2}{3}$ (b) 2 (c) $\frac{5}{2}$ (d) 2 (e) 3 (f) $\frac{1}{2}$ (g) $\frac{1}{3}$ (h) 1 **18.4** (a) n (b) $\frac{1}{2}n$ (c) $e^{n \cdot m}$ **18.5** (a) -1 (b) 1 (c) 5 (d) 6 (e) $+\infty$ (f) 0 **18.6** (a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) -3 (d) -2 (e) $+\infty$ (f) $-\infty$ (g) 0 (h) 0 (i) $\frac{1}{2}$ (j) 0 (k) e^3 (l) e^{-5} (m) e^8 (n) e^{-2} (o) e^{-6} (p) e^9 (q) e^8 (r) e^{-3} **18.7** (a) Tak, funkcja f jest ciągła w punkcie $c = 5$, gdyż jej granica w tym punkcie istnieje i wynosi 10, a zatem jest równa wartości funkcji f w punkcie 5. (b) Nie, funkcja f nie jest ciągła w punkcie $c = 1$, bo granica prawostronna funkcji f w tym punkcie wynosi $+\infty$. (c) Nie, funkcja f nie jest ciągła w punkcie $c = 1$, bo granica prawostronna funkcji f w tym punkcie wynosi 1, natomiast granica lewostronna funkcji f w tym punkcie wynosi -1 . (d) Nie, funkcja f nie jest ciągła w punkcie $c = 1$, bo granice lewo- i prawostronna funkcji f w punkcie $c = 1$ są różne. Wynoszą one odpowiednio -1 oraz 1. (e) Tak, funkcja f jest ciągła w punkcie $c = 1$. Wspólna wartość granicy (obustronnej) oraz wartość funkcji w punkcie $c = 1$ wynosi 0. (f) Tak, funkcja f jest ciągła w punkcie $c = 0$. Jej granica jak i wartość w punkcie $c = 0$ wynosi 0. **18.8** (a) $a = 3$ (b) $a = 6$ (c) $a = 2$ (d) Po obliczeniu granic i wartości funkcji f w punktach -1 oraz 5, otrzymujemy równości $2 = b(1+a)^2$ i $8 = b(5-a)^2$. Dzieliąc prawe równanie przez lewe dostajemy $4(1+a)^2 = (5-a)^2$, co po uporządkowaniu daje $3a^2 + 18a - 21 = 0$, czyli $a^2 + 6a - 7 = 0$. W konsekwencji $a_1 = -7$ oraz $b_1 = 2(1+a_1)^{-2} = \frac{1}{18}$ lub $a_2 = 1$ oraz $b_2 = 2(1+a_2)^{-2} = \frac{1}{2}$. (e) $a = 2$ oraz $b = 2$ **18.9** Można wziąć np. funkcje $f_1, f_2: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorami $f_1(x) = x$ dla $x \neq 1$ i $f_1(1) = 11$ oraz $f_2(x) = 10x$ dla $x \neq 1$ i $f_2(1) = 0$. **18.10** Z tego, że dowolną liczbę rzeczywistą możemy przybliżać za pomocą ciągu liczb wymiernych jak i ciągu liczb niewymiernych wynika, że funkcja Dirichleta nie ma granicy w żadnym punkcie swojej dziedziny. Mianowicie biorąc ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liczb niewymiernych zbieżny do c , mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Natomiast biorąc ciąg argumentów wymiernych $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżny do

c mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$. W dowolnym punkcie swojej dziedziny funkcja Dirichleta nie posiada więc granicy. Tym bardziej nie może być ciągła. **18.11** Jeśli $c \in \mathbb{Q}$, tzn. $c = \frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ i ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, to $f(c) = \frac{1}{q}$. Zauważmy, że biorąc ciąg liczb wymiernych postaci $\frac{np+1}{nq}$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{np+1}{nq} = \frac{p}{q}$. Ponadto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{np+1}{nq}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nq} = 0 \neq \frac{1}{q} = f(c)$. Zatem funkcja Riemanna nie jest ciągła w punktach $c \in \mathbb{Q}$. Załóżmy teraz, że $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wtedy $f(d) = 0$. Niech $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do d . Jeśli ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ składa się z liczb niewymiernych, to $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$. Załóżmy teraz, że ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem liczb wymiernych, tzn. $x_n = \frac{p_n}{q_n}$, gdzie $p_n \in \mathbb{Z}$ i $q_n \in \mathbb{N}$; możemy założyć, że ułamek $\frac{p_n}{q_n}$ jest nieskracalny. Można pokazać, że skoro $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = d$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty$. W przeciwnym razie, tzn. gdyby mianowniki q_n mogły przyjmować wartości ze skończonego przedziału, to to samo byłoby prawdą dla liczników p_n . A zatem liczby $\frac{p_n}{q_n}$ nie mogłyby się „zbliżać” do liczby niewymiernej d . Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{p_n}{q_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} = 0$. Gdyby wreszcie ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ był złożony zarówno z nieskończenie wielu liczb wymiernych jak i liczb niewymiernych, to rozważając jego podciągi „wymierne” i „niewymierne”, można uzasadnić, że ciąg $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do 0. Pokazaliśmy tym samym, że dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$. Ponieważ $f(d) = 0$, oznacza to, że funkcja Riemanna jest ciągła w punkcie d .

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1993.
- W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2013.
- J. Stewart, *Essential Calculus*, ThomsonBrooks/Cole, 2007.
- D. G. Zill, *Calculus with analytic geometry*, PWS Publishers, 1985.