

ASYMPTOTYKA

TEORIA

NOTACJA „DUŻE O”. Niech $a, b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwoma funkcjami (ciągami). Piszemy $a(n) = O(b(n))$, gdy istnieje stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq C|b(n)|$ dla wszystkich $n \geq N$.

UWAGA: Zamiast stosowanego powszechnie zapisu $a(n) = O(b(n))$, powinniśmy raczej pisać $a(n) \in O(b(n))$ lub nawet $a \in O(b(n))$, gdyż tak naprawdę $O(b(n))$ jest nie jednym konkretnym ciągiem, a zbiorem wszystkich ciągów b takich, że począwszy od pewnego miejsca mamy $|a(n)| \leq C|b(n)|$ dla pewnej stałej C . Jeżeli powyższa nierówność jest prawdziwa dla ciągu b , to będzie także prawdziwa dla ciągu $2b, 3b$, itd.

WARUNEK WYSTARCZAJĄCY. Niech $a, b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwoma ciągami. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a(n)|}{|b(n)|} = k$ dla pewnego $k \geq 0$, to $a(n) = O(b(n))$.

HIERARCHIA „DUŻEGO O”. Oto hierarchia pewnych znanych ciągów uporządkowanych w ten sposób, że każdy z nich jest O od wszystkich ciągów na prawo od niego: $1, \log_2 n, \dots, \sqrt[4]{n}, \sqrt[3]{n}, \sqrt{n}, n, n \log_2 n, n\sqrt{n}, n^2, n^3, n^4, \dots, 2^n, n!, n^n$.

INNE MIARY ASYMPTOTYCZNEGO TEMPA WZROSTU. Oprócz notacji „duże O” w literaturze można znaleźć również inne miary asymptotycznego tempa wzrostu. Nie będziemy się nimi zajmować dokładnie, ale dla pełności przytoczymy ich definicje. Niech $a, b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwoma ciągami.

- Piszemy $a(n) = o(b(n))$, gdy dla każdej stałej $C > 0$ istnieje wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ taki, że $|a(n)| \leq C|b(n)|$ dla wszystkich $n \geq N$.
- Piszemy $a(n) = \Omega(b(n))$, gdy istnieją stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \geq C|b(n)|$ dla wszystkich $n \geq N$.
- Piszemy $a(n) = \omega(b(n))$, gdy dla każdej stałej $C > 0$ istnieje wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ taki, że $|a(n)| \geq C|b(n)|$ dla wszystkich $n \geq N$.
- Piszemy $a(n) = \Theta(b(n))$, gdy istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $C_1|b(n)| \leq |a(n)| \leq C_2|b(n)|$ dla wszystkich $n \geq N$.

UWAGA: Po dokładnej lekturze powyższej listy nasuwa się jeden wniosek: „O” w nazwie „duże O” odpowiada greckiej literze omikron. Dlatego też zamiast notacji „duże O” powinniśmy mówić raczej o notacji „duże omikron”.

ZADANIA

Zadanie 17.1. Niech $a, b, c, d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągami oraz niech $k \in \mathbb{R}$. Pokaż, że

- (a) jeżeli $a(n) = O(b(n))$, to $k \cdot a(n) = O(b(n))$,
- (b) jeżeli $a(n) = O(c(n))$ oraz $b(n) = O(d(n))$, to $a(n) + b(n) = O(\max\{|c(n)|, |d(n)|\})$;
w szczególności, jeżeli $a(n) = O(c(n))$ oraz $b(n) = O(c(n))$, to $a(n) + b(n) = O(c(n))$,
- (c) jeżeli $a(n) = O(c(n))$ oraz $b(n) = O(d(n))$, to $a(n) \cdot b(n) = O(c(n) \cdot d(n))$,
- (d) jeżeli $a(n) = O(b(n))$ oraz $b(n) = O(c(n))$, to $a(n) = O(c(n))$.

Zadanie 17.2. Niech l będzie nieujemną liczbą rzeczywistą. Pokaż, że $n^l = O(n^k)$ dla każdego $k \in [l, +\infty)$ oraz że n^l nie jest $O(n^m)$ dla żadnego $m \in [0, l)$.

Zadanie 17.3. Dla każdego z poniższych ciągów znajdź najmniejszą liczbę $k > 0$ taką, że $a(n) = O(n^k)$

- (a) $a(n) = 13n^2 + 4n - 73$,
- (b) $a(n) = -5n^3 + 3n^2 - 2n$,
- (c) $a(n) = (2n^2 - 1)^7$,
- (d) $a(n) = (1 - 3n^2)^6$,
- (e) $a(n) = (n^3 + 3n - 1)^4$,
- (f) $a(n) = (n^2 - 2n + 3)^5$,
- (g) $a(n) = (n^2 + 1)(2n^4 + 3n - 8)$,
- (h) $a(n) = (n^3 + 1)(n^2 + n + 1)^2$,
- (i) $a(n) = \sqrt{n^2 - 1}$,
- (j) $a(n) = \sqrt{n^2 + n}$.

Zadanie 17.4. Sprawdź, czy poniższe równości są prawdziwe. W każdym przypadku uzasadnij swoją odpowiedź:

- (a) $2^{n+1} = O(2^n)$,
- (b) $2^{2n} = O(2^n)$,
- (c) $(n + 1)^2 = O(n^2)$,
- (d) $(200n)^2 = O(n^2)$,
- (e) $\log_3^2 n = O(\sqrt{n})$,
- (f) $\log_2 n^5 = O(\log_4 n)$,
- (g) $\log_2 n^n = O(\log_2 n)$,
- (h) $(\sqrt{n} + 1)^4 = O(n^2)$,
- (i) $40^n = O(2^n)$,
- (j) $(40n)^2 = O(n^2)$,
- (k) $(2n)! = O(n!)$,
- (l) $(n + 1)^{40} = O(n^{40})$.

Zadanie 17.5. Pokaż, że jeżeli $a(n) = 3n^4 + O(n)$ oraz $b(n) = 2n^3 + O(n)$, to $a(n) + b(n) = 3n^4 + O(n^3)$ oraz $a(n) \cdot b(n) = 6n^7 + O(n^5)$.

UWAGA: Zapis $a(n) + O(b(n))$ należy rozumieć jako $a(n) + c(n)$ dla pewnego ciągu $c(n) = O(b(n))$.

Zadanie 17.6. Znajdź przykłady ciągów a oraz b takich, że $a(n) = O(n^5)$ oraz $b(n) = O(n^2)$, ale $\frac{a(n)}{b(n)}$ nie jest $O(n^3)$.

Zadanie 17.7. Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$ niech $\text{CYFR}(n)$ oznacza liczbę cyfr w rozwinięciu dziesiętnym liczby n .

- (a) Pokaż, że $10^{\text{CYFR}(n)-1} \leq n < 10^{\text{CYFR}(n)}$.
- (b) Pokaż, że $\log_{10} n$ jest $O(\text{CYFR}(n))$.
- (c) Pokaż, że $\text{CYFR}(n)$ jest $O(\log_{10}(n))$.

ROZWIĄZANIA

- 17.1** (a) Załóżmy, że $k \neq 0$. Ponieważ $a(n) = O(b(n))$, istnieje stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq C|b(n)|$ dla wszystkich $n \geq N$. Wtedy dla $n \geq N$ mamy również

$$|k \cdot a(n)| = |k| \cdot |a(n)| \leq C_1 |b(n)|,$$

gdzie $C_1 := |k| \cdot C$. Oznacza to, że $k \cdot a(n) = O(b(n))$. Jeżeli $k = 0$, to wtedy $k \cdot a(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i łatwo już widać, że $k \cdot a(n) = O(b(n))$.

- (b) Z założenia istnieją $C_1, C_2 > 0$ oraz $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq C_1 |c(n)|$ dla $n \geq N_1$ oraz $|b(n)| \leq C_2 |d(n)|$ dla $n \geq N_2$. Oznaczając większą z liczb C_1, C_2 przez C oraz większy ze wskaźników N_1, N_2 przez N , z powyższych nierówności otrzymujemy

$$|a(n)| \leq C |c(n)| \leq C \max\{|c(n)|, |d(n)|\}$$

oraz

$$|b(n)| \leq C |d(n)| \leq C \max\{|c(n)|, |d(n)|\}$$

dla $n \geq N$. Stąd na podstawie nierówności trójkąta dla wartości bezwzględnej dostajemy

$$|a(n) + b(n)| \leq |a(n)| + |b(n)| \leq 2C \max\{|c(n)|, |d(n)|\}.$$

Tym samym

$$a(n) + b(n) = O(\max\{|c(n)|, |d(n)|\}).$$

- (c) Z założenia istnieją $C_1, C_2 > 0$ oraz $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq C_1 |c(n)|$ dla $n \geq N_1$ oraz $|b(n)| \leq C_2 |d(n)|$ dla $n \geq N_2$. Wtedy dla $n \geq N$, gdzie $N = \max\{N_1, N_2\}$, mamy

$$|a(n) \cdot b(n)| = |a(n)| \cdot |b(n)| \leq C_1 |c(n)| \cdot C_2 |d(n)| = C_1 C_2 |c(n) \cdot d(n)|.$$

Oznacza to, że $a(n) \cdot b(n) = O(c(n) \cdot d(n))$.

- (d) Z założenia istnieją $C_1, C_2 > 0$ oraz $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq C_1 |b(n)|$ dla $n \geq N_1$ oraz $|b(n)| \leq C_2 |c(n)|$ dla $n \geq N_2$. Wtedy dla $n \geq N$, gdzie $N = \max\{N_1, N_2\}$, mamy

$$|a(n)| \leq C_1 |b(n)| \leq C_1 C_2 |c(n)|.$$

Tym samym $a(n) = O(c(n))$.

- 17.2** Niech $k \in [l, +\infty)$ będzie ustalone. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^l}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{l-k} = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } k = l, \\ 0, & \text{jeżeli } k > l, \end{cases}$$

stwierdzamy natychmiast, że $n^l = O(n^k)$. Przypuśćmy teraz, że $n^l = O(n^m)$ dla pewnego $m \in [0, l)$. Istnieją wtedy stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $n^l \leq Cn^m$ dla $n \geq N$. Stąd dla $n \geq N$ mamy $C \geq n^{l-m}$ i w konsekwencji $C \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{l-m} = +\infty$, bo $l - m > 0$. Otrzymana sprzeczność (C jest liczbą nie może być więc równe $+\infty$) pokazuje, że n^l nie jest $O(n^m)$ dla żadnego $m \in [0, l)$.

- 17.3 a) Mamy $13n^2 = O(n^2)$, $4n = O(n^2)$ oraz $-73 = O(n^2)$. Zatem $a(n) = 13n^2 + 4n - 73 = O(n^2)$. Rozumując jak w poprzednim zadaniu można pokazać, że dla żadnego $k \in (0, 2)$ ciąg $a(n)$ nie będzie $O(n^k)$. Istotnie, gdyby istniały stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 2)$, to

$$0 < \frac{1}{C} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|a(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|13n^2 + 4n - 73|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{2-k}}}{\left|13 + \frac{4}{n} - \frac{73}{n^2}\right|} = \frac{0}{13} = 0,$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2-k}} = 0$, co jest niemożliwe.

- b) Mamy $-5n^3 = O(n^3)$, $3n^2 = O(n^3)$ oraz $-2n = O(n^3)$. Zatem $a(n) = -5n^3 + 3n^2 - 2n = O(n^3)$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 3)$. Gdyby tak było istniałyby $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 3)$. I wtedy

$$0 < \frac{1}{C} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|a(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|-5n^3 + 3n^2 - 2n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{3-k}}}{\left|-5 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}\right|} = \frac{0}{-5} = 0,$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{3-k}} = 0$, co jest niemożliwe.

- c) Na podstawie poprzednich podpunktów mamy $2n^2 - 1 = O(n^2)$. Zatem $a(n) = (2n^2 - 1)^7 = O(n^{14})$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 14)$. Na wstępie zauważmy, że $a(n)$ jest wielomianem zmiennej n stopnia 14, tzn. $a(n) = 128n^{14} + P(n)$, gdzie $\deg P \leq 13$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^{14}} = 0$. Gdyby istniały stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 14)$, mielibyśmy

$$0 < \frac{1}{C} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|a(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|128n^{14} + P(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{14-k}}}{\left|128 + \frac{P(n)}{n^{14}}\right|} = \frac{0}{128} = 0,$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{14-k}} = 0$, co jest niemożliwe.

- d) Mamy $1 - 3n^2 = O(n^2)$. Stąd $a(n) = (1 - 3n^2)^6 = O(n^{12})$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 12)$. Zauważmy, że $a(n)$ jest wielomianem zmiennej n stopnia 12, tzn. $a(n) = 729n^{12} + P(n)$, gdzie $\deg P \leq 11$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^{12}} = 0$. Gdyby istniały stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 12)$, mielibyśmy

$$0 < \frac{1}{C} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|a(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|729n^{12} + P(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{12-k}}}{\left|729 + \frac{P(n)}{n^{12}}\right|} = \frac{0}{729} = 0,$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{12-k}} = 0$, co jest niemożliwe.

- e) Mamy $n^3 + 3n - 1 = O(n^3)$. Stąd $a(n) = (n^3 + 3n - 1)^4 = O(n^{12})$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 12)$. Zauważmy, że $a(n)$ jest wielomianem zmiennej n stopnia 12, tzn. $a(n) = n^{12} + P(n)$, gdzie $\deg P \leq 11$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^{12}} = 0$.

Gdyby istniały stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 12)$, mielibyśmy

$$0 < \frac{1}{C} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|a(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|n^{12} + P(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{12-k}}}{|1 + \frac{P(n)}{n^{12}}|} = \frac{0}{1} = 0,$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{12-k}} = 0$, co jest niemożliwe.

- f) Mamy $n^2 - 2n + 3 = O(n^2)$. Stąd $a(n) = (n^2 - 2n + 3)^5 = O(n^{10})$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 10)$. Zauważmy, że $a(n)$ jest wielomianem zmiennej n stopnia 10, tzn. $a(n) = n^{10} + P(n)$, gdzie $\deg P \leq 9$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^{10}} = 0$. Gdyby istniały stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 10)$, mielibyśmy

$$0 < \frac{1}{C} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|a(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|n^{10} + P(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{10-k}}}{|1 + \frac{P(n)}{n^{10}}|} = \frac{0}{1} = 0,$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{10-k}} = 0$, co jest niemożliwe.

- g) Mamy $n^2 + 1 = O(n^2)$ oraz $2n^4 + 3n - 8 = O(n^4)$. Zatem $a(n) = O(n^2 \cdot n^4) = O(n^6)$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 6)$. Zauważmy, że $a(n)$ jest wielomianem zmiennej n stopnia 6, tzn. $a(n) = 2n^6 + P(n)$, gdzie $\deg P \leq 5$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^6} = 0$. Gdyby istniały stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 6)$, mielibyśmy

$$0 < \frac{1}{C} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|a(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|2n^6 + P(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{6-k}}}{|2 + \frac{P(n)}{n^6}|} = \frac{0}{2} = 0,$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{6-k}} = 0$, co jest niemożliwe.

- h) Mamy $n^3 + 1 = O(n^3)$ oraz $n^2 + n + 1 = O(n^2)$. Zatem $a(n) = O(n^3 \cdot n^4) = O(n^7)$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 7)$. Zauważmy, że $a(n)$ jest wielomianem zmiennej n stopnia 7, tzn. $a(n) = n^7 + P(n)$, gdzie $\deg P \leq 6$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^7} = 0$. Gdyby istniały stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $|a(n)| \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 7)$, mielibyśmy

$$0 < \frac{1}{C} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|a(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{|n^7 + P(n)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{7-k}}}{|1 + \frac{P(n)}{n^7}|} = \frac{0}{1} = 0,$$

bo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{7-k}} = 0$, co jest niemożliwe.

- i) Zauważmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 1.$$

Oznacza to, że $a(n) = O(n)$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 1)$. Gdyby tak było, to istniałby stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a(n) \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 1)$. Mielibyśmy wtedy

$$0 < \frac{1}{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\sqrt{n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{1-k}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{0}{1} = 0,$$

co jest niemożliwe.

j) Zauważmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Oznacza to, że $a(n) = O(n)$. Pokażemy teraz, że $a(n)$ nie jest $O(n^k)$ dla żadnego $k \in (0, 1)$. Gdyby tak było, to istniałby stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $a(n) \leq Cn^k$ dla $n \geq N$, gdzie $k \in (0, 1)$. Mielibyśmy wtedy

$$0 < \frac{1}{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{1-k}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{0}{1} = 0,$$

co jest niemożliwe.

17.4 (a) Podana równość jest prawdziwa, bowiem $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ i w konsekwencji $2^{n+1} = O(2^n)$.

(b) Podana równość nie jest prawdziwa. Bowiem gdyby tak było, to istniałby stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $2^{2n} \leq C \cdot 2^n$ dla $n \geq N$. I wtedy

$$0 < \frac{1}{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

co jest niemożliwe.

(c) Podana równość jest prawdziwa, gdyż $n + 1 = O(n)$ i w konsekwencji $(n + 1)^2 = O(n^2)$.

(d) Podana równość jest prawdziwa, gdyż $(200n)^2 = 40000n^2 = O(n^2)$.

(e) Podana równość jest prawdziwa. Zauważmy bowiem, że

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_3^2 x}{\sqrt{x}} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log_3 x \cdot \frac{1}{x \ln 3}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \log_3 x}{\ln 3 \cdot \sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot \frac{1}{x \ln 3}}{\ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{\ln^2 3 \cdot \sqrt{x}} = \frac{8}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

A zatem i $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_3^2 n}{\sqrt{n}} = 0$, co pokazuje, że $\log_3^2 = O(\sqrt{n})$.

(f) Podana równość jest prawdziwa, bowiem $\log_2 n^5 = 5 \log_2 n = 5 \cdot \frac{\log_4 n}{\log_4 2} = \frac{5}{2} \log_4 n = O(\log_4 n)$.

(g) Podana równość nie jest prawdziwa. Bowiem gdyby tak było, to istniałby stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\log_2 n^n \leq C \log_2 n$ dla $n \geq N$. I wtedy

$$0 < \frac{1}{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{\log_2 n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n \log_2 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

co jest niemożliwe.

(h) Podana równość jest prawdziwa, bowiem $\sqrt{n} + 1 = O(\sqrt{n})$. Zatem $(\sqrt{n} + 1)^4 = O(\sqrt{n}^4) = O(n^2)$.

(i) Podana równość nie jest prawdziwa. Gdyby tak było, to istniałby stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $40^n \leq C \cdot 2^n$ dla $n \geq N$. I wtedy

$$0 < \frac{1}{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{40^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{20^n} = 0,$$

co jest niemożliwe.

(j) Podana równość jest prawdziwa, bowiem $(40n)^2 = 1600n^2 = O(n^2)$.

- (k) Podana równość nie jest prawdziwa. Gdyby tak było, to istniałby stała $C > 0$ oraz wskaźnik $N \in \mathbb{N}$ takie, że $(2n)! \leq Cn!$ dla $n \geq N$. I wtedy

$$0 < \frac{1}{C} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2n} = 0,$$

co jest niemożliwe.

- (l) Podana równość jest prawdziwa, bowiem $n+1 = O(n)$. Zatem $(n+1)^{40} = O(n^{40})$.

17.5 Skoro $a(n) = 3n^4 + O(n)$ oraz $b(n) = 2n^3 + O(n)$, to istnieją ciągi $c, d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że $a(n) = 3n^4 + c(n)$, $b(n) = 2n^3 + d(n)$, $c(n) = O(n)$ oraz $d(n) = O(n)$. Wtedy $a(n) + b(n) = 3n^4 + 2n^3 + c(n) + d(n)$. Zauważmy również, że $2n^3 = O(n^3)$, $c(n) = O(n^3)$ oraz $d(n) = O(n^3)$. Stąd wynika, że $a(n) + b(n) = 3n^4 + e(n) = 3n^4 + O(n^3)$, bo ciąg $e(n) := 2n^3 + c(n) + d(n)$ jest $O(n^3)$. Przejdziemy teraz do oszacowania asymptotycznego tempa wzrostu iloczynu ciągów a i b . Mamy

$$a(n) \cdot b(n) = (3n^4 + c(n)) \cdot (2n^3 + d(n)) = 6n^7 + 3n^4 \cdot d(n) + 2n^3 \cdot c(n) + c(n) \cdot d(n).$$

Niech

$$f(n) := 3n^4 \cdot d(n) + 2n^3 \cdot c(n) + c(n) \cdot d(n).$$

Zauważmy, że

$$3n^4 \cdot d(n) = O(n^4 \cdot n) = O(n^5), \quad 2n^3 \cdot c(n) = O(n^3 \cdot n) = O(n^4)$$

oraz $c(n) \cdot d(n) = O(n \cdot n) = O(n^2)$. Zatem $2n^3 \cdot c(n) = O(n^5)$ oraz $c(n) \cdot d(n) = O(n^5)$. Wynika stąd, że $f(n) = O(n^5)$ i w konsekwencji $a(n) \cdot b(n) = 6n^7 + f(n) = 6n^7 + O(n^5)$.

17.6 Niech $a(n) = n^5$ oraz $b(n) = n$. Wtedy oczywiście $a(n) = O(n^5)$ oraz $b(n) = O(n^2)$. Ale na podstawie Zadania 17.2 ciąg $\frac{a(n)}{b(n)} = n^4$ nie jest $O(n^3)$.

- 17.7** (a) Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $m := \text{cyfr}(n)$. Wtedy liczba $10^{\text{cyfr}(n)}$ jest jedynką z m zerami. Jest więc to liczba $(m+1)$ -cyfrowa i jako taka jest większa od liczby m -cyfrowej n . Stąd $n < 10^{\text{cyfr}(n)}$. Z drugiej strony, liczba $10^{\text{cyfr}(n)-1}$ jest najmniejszą liczbą m -cyfrową. Zatem $10^{\text{cyfr}(n)-1} \leq n$.
- (b) Na podstawie poprzedniego podpunktu wiemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $n < 10^{\text{cyfr}(n)}$. Logarytmując tę nierówność, otrzymujemy $\log_{10} n < \text{cyfr}(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$, co oznacza, że $\log_{10} n \in O(\text{cyfr}(n))$.
- (c) Na podstawie podpunktu (a) wiemy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $10^{\text{cyfr}(n)-1} \leq n$. Logarytmując tę nierówność, otrzymujemy $\text{cyfr}(n) \leq 1 + \log_{10} n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd wynika już, że $\text{cyfr}(n) \in O(\log_{10} n)$.

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- *Asymptotyczne tempo wzrostu*, https://pl.wikipedia.org/wiki/Asymptotyczne_tempo_wzrostu
- K. A. Ross, Ch. R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2005.
- R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.