

SZEREGI

TEORIA

SZEREG. Niech dany będzie pewien ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wyrażenie $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ nazywamy *szeregiem*, liczby $a_1, a_2, \dots$ nazywamy *wyrazami szeregu*, a element a_n – *wyrazem ogólnym szeregu*. Szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ skrótowo oznaczamy również $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

SUMY CZĘŚCIOWE SZEREGU. Niech dany będzie pewien ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ciąg $s_1 := a_1, s_2 := a_1 + a_2, \dots, s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots$ nazywamy ciągiem *sum częściowych szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

SUMA SZEREGU. Niech dany będzie pewien ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Jeżeli ciąg $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sum częściowych szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny do granicy skończonej s , to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest *zbieżny*, a liczbę s nazywamy *sumą* tego szeregu piszemy wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Szereg, który nie jest zbieżny nazywamy *szeregiem rozbieżnym*.

WARUNEK KONIECZNY ZBIEŻNOŚCI SZEREGU. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

KRYTERIUM ILORAZOWE (D'ALEMBERTA). Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz niech $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Wówczas:

- jeżeli $\alpha < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- jeżeli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,
- jeżeli $\alpha = 1$, to kryterium ilorazowe (d'Alemberta) nie rozstrzyga zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tzn. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ może być zbieżny lub rozbieżny.

KRYTERIUM PIERWIĄTKOWE (CAUCHY'EGO). Niech będzie dany szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz niech $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. Wówczas:

- jeżeli $\alpha < 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny,
- jeżeli $\alpha > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny,
- jeżeli $\alpha = 1$, to kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego) nie rozstrzyga zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tzn. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ może być zbieżny lub rozbieżny.

UWAGA: Kryterium pierwiastkowe (Cauchy'ego) jest mocniejsze niż kryterium ilorazowe (d'Alemberta), tzn. we wszystkich przypadkach, gdy kryterium d'Alemberta daje odpowiedź na pytanie dotyczące zbieżności szeregu, odpowiedź tę można otrzymać także za pomocą kryterium Cauchy'ego. Istnieją jednak szeregi, których zbieżność można wykazać w oparciu o kryterium Cauchy'ego, ale w ich przypadku kryterium d'Alemberta nie daje rozstrzygnięcia.

KRYTERIUM PORÓWNAWCZE 1. Załóżmy, że $0 \leq a_n \leq b_n$ dla $n \geq n_0$, gdzie n_0 jest pewną ustaloną liczbą naturalną. Wówczas:

- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

KRYTERIUM PORÓWNAWCZE 2. Załóżmy, że $a_n > 0$ oraz $b_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$. Jeżeli $\alpha \in (0, +\infty)$, to bądź oba szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, bądź oba są rozbieżne.

UWAGA: Szeregiem, z którym najczęściej porównujemy dany szereg w kryterium porównawczym, jest szereg *Dirichleta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}.$$

Jeżeli $a \in (0, 1]$, to szereg Dirichleta jest rozbieżny do $+\infty$, natomiast jeżeli $a > 1$, to szereg Dirichleta jest zbieżny.

KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW – UWAGI. Podane powyżej kryteria są najbardziej znanymi i powszechnymi kryteriami badania zbieżności szeregów. Nie są one jednak jedyne. W książce G. M. Fihtenholza *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 2* można znaleźć również inne kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych (dodatnich): kryterium Raabego, Kummera, Bertranda, Gaussa, Maclaurina–Cauchy'ego (całkowe), czy w końcu kryterium Jermakowa.

SZEREGIEM GEOMETRYCZNYM nazywamy szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{n-1}$, gdzie a_1 i q są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Jeżeli $|q| < 1$, to szereg geometryczny jest zbieżny do sumy $\frac{a_1}{1-q}$. Szereg geometryczny jest również zbieżny, gdy $a_1 = 0$; wtedy sumą jest 0. Jeżeli natomiast $a_1 \neq 0$ oraz $|q| \geq 1$, to szereg geometryczny jest rozbieżny.

ZADANIA

Zadanie 16.1. Wykazać rozbieżność szeregu korzystając z warunku koniecznego zbieżności szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\sin \frac{1}{n}\right),$$

$$(d) \sum_{n=2}^{\infty} n(\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 - 4}),$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Zadanie 16.2. Korzystając z kryterium ilorazowego d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n},$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!},$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}(2^{-(n+1)}\pi),$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!},$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!},$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!},$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n},$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^2 2^n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^{n+1}}{2^{n-1} \cdot 3^n},$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n},$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n3^n}.$$

Zadanie 16.3. Korzystając z kryterium pierwiastkowego Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n},$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^n},$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arc} \sin^n \frac{1}{n}},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}},$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2} \right)^{2n^2-n},$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}^n n}{3^n},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n},$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n^2},$$

$$(k) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n+1}},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} 5^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2},$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100} \cdot 99^n}{100^n},$$

$$(l) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{n^2} \right)^n.$$

Zadanie 16.4. Stosując kryterium Cauchy'ego udowodnić zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}.$$

Pokazać też, że kwestii zbieżności tego szeregu nie rozstrzyga kryterium d'Alemberta.

Zadanie 16.5. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}},$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3},$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{1}{n},$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}},$$

$$\begin{array}{lll}
\text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}, & \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), & \text{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^2}, \\
\text{(h)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, & \text{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2, & \text{(n)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \right), \\
\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{1+n^4}, & \text{(l)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}, & \text{(o)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}}.
\end{array}$$

Zadanie 16.6. Znaleźć sumę następujących szeregów

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, & \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}, & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}.
\end{array}$$

ROZWIĄZANIA

16.1 (a) Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0,$$

szereg jest rozbieżny.

(b) Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin \frac{1}{n}) = \cos(\sin 0) = \cos 0 = 1 \neq 0,$$

szereg jest rozbieżny.

(c) Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \neq 0,$$

szereg jest rozbieżny.

(d) Ponieważ

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 - 4}) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{n^2 - 4}}{\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{n^2 - 4}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n}{\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{n^2 - 4}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{\sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{4}{n^2}}} = 4 \neq 0,
\end{aligned}$$

szereg jest rozbieżny.

(e) Z zadania 15.13 (a) wiemy, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = (-1)^n$ nie posiada granicy. Oznacza to, że nie może on dążyć do zera. Tym samym szereg jest rozbieżny.

(f) Z zadania 15.13 (c) wiemy, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ nie posiada granicy. Oznacza to, że nie może on dążyć do zera. Tym samym szereg jest rozbieżny.

16.2 (a) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} (n+1) = +\infty > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(b) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0 < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(c) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(d) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)5^{n+2}}{2^n \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{2^{n-1} \cdot 3^n}{(n+1)5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5(n+2)}{6(n+1)} = \frac{5}{6} < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(e) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{10^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{2n+1} = 0 < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(f) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(g) Ponieważ

$$\begin{aligned} \alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5}{2^{n+1} + 3^{n+1}} \cdot \frac{2^n + 3^n}{n^5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \frac{1}{3} < 1, \end{aligned}$$

szereg jest zbieżny.

(h) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2 e^{n+1}} \cdot \frac{(n!)^2 e^n}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{e(n+1)^2} = \frac{4}{e} > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(i) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \operatorname{tg}(2^{-(n+2)}\pi)}{n \operatorname{tg}(2^{-(n+1)}\pi)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{2^{n+2}}} = \frac{1}{2} < 1$$

(zob. Zadanie 4.15 (f)), szereg jest zbieżny.

(j) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1} + 1} \cdot \frac{2^n + 1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(1 + \frac{1}{2^n})}{2 + \frac{1}{2^n}} = +\infty > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(k) Ponieważ

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{\sqrt{n!}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sqrt{n+1} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = +\infty > 1,\end{aligned}$$

szereg jest rozbieżny.

(l) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n 3^n}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n^2}{n^2 - 1} = \frac{1}{3} < 1,$$

szereg jest zbieżny.

16.3 (a) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^3}{e} = \frac{1}{e} < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(b) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 \sqrt[n]{3}}{8 \sqrt[n]{\frac{1}{2}}} = \frac{9}{8} > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(c) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(d) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = 5e^{-1} > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(e) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0 < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(f) Ponieważ

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{2n^2-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+2}\right)^{2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{n+2}\right)^{-\frac{n+2}{3}}\right]^{-\frac{3(2n-1)}{n+2}} = e^{-6} < 1,\end{aligned}$$

szereg jest zbieżny.

(g) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{1}{2} e > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(h) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^{100} 99^n}{100^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{99 (\sqrt[n]{n})^{100}}{100} = \frac{99}{100} < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(i) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\arcsin^n \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\arcsin \frac{1}{n}} = \frac{1}{\arcsin 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(j) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\arctg^n n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg n}{3} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} < 1,$$

szereg jest zbieżny.

(k) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} = 2 > 1,$$

szereg jest rozbieżny.

(l) Ponieważ

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1-n}{n^2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{n^2} = 0 < 1,$$

szereg jest zbieżny.

16.4 Zauważmy, że

$$2^{(-1)^n - n} = \frac{2^{(-1)^n}}{2^n}.$$

Stąd dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \leq 2^{(-1)^n - n} \leq 2 \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Z uwagi na fakt, że funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ jest rosnąca na $[0, +\infty)$, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, otrzymujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{(-1)^n - n}} = \frac{1}{2};$$

przypomnijmy bowiem, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ dla $a > 0$. Na mocy kryterium pierwiastkowego (Cauchy'ego) szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$$

jest więc szeregiem zbieżnym. Z drugiej strony iloraz

$$\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

gdzie $a_n = 2^{(-1)^n - n}$, jest równy

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{(-1)^{n+1}}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{2^{(-1)^n}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{(-1)^{n+1} - (-1)^n} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{(-1)^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2(-1)^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 4^{(-1)^{n+1}}.\end{aligned}$$

To pokazuje, że ciąg ilorazów $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest zbieżny, bowiem zawiera dwa podciągi stałe: jeden numerowany liczbami parzystymi o elementach równych $\frac{1}{8}$, a drugi numerowany liczbami nieparzystymi o elementach równych 2. Nie możemy wykorzystać więc kryterium ilorazowego, bo granica

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

nie istnieje.

- 16.5** (a) Sposób 1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n-1}$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

Sposób 2. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.

- (b) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $0 \leq 2^n \sin \frac{\pi}{3n} \leq 2^n \cdot \frac{\pi}{3n} = \pi \cdot (\frac{2}{3})^n$; pierwsze szacowanie wynika z nierówności $\sin x \leq x$ prawdziwej dla dowolnego $x \geq 0$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ jest zbieżny (jako geometryczny o ilorazie $|q| < 1$), zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3n}$.
- (c) Sposób 1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$.

Sposób 2. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{4n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$.

- (d) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$0 \leq \sqrt{n} \sin^2 \frac{1}{n} \leq \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ jest zbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin^2 \frac{1}{n}$.

- (e) Sposób 1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{1}{n} = \frac{n^2}{n^3} \leq \frac{n^2+1}{n^3}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$.

Sposób 2. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+n}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$.

(f) Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$.

(g) SPOSÓB 1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{1}{\sqrt{3n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}},$$

bo $n \leq n^2$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$.

SPOSÓB 2. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}}} = 1$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}}$.

(h) Zaczniemy od wykazania nierówności $\ln x < x$ dla $x > 0$. W tym celu rozważmy funkcję $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem $f(x) = \ln x - x$. Mamy $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ Stąd $f'(x) > 0$ dla $0 < x < 1$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x > 1$. Oznacza to, że w punkcie $x = 1$ funkcja f ma maksimum $f(1) = -1$. W konsekwencji $\ln x - x = f(x) \leq -1 < 0$ dla wszystkich $x > 0$. Zatem $\ln x < x$ dla $x > 0$.

Stosując powyższą nierówność dla $n \geq 2$ otrzymamy

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

(i) SPOSÓB 1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{1 + n^2}{1 + n^4} \leq \frac{n^2 + n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2},$$

bo $1 \leq n^k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^2}{1 + n^4}$.

SPOSÓB 2. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^2}{1 + n^4} \cdot n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n^4}{1 + n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{1}{n^4} + 1} = 1$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^2}{1 + n^4}$.

(j) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}.$$

Stąd

$$0 \leq \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ jest zbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

(k) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 \leq \left(\frac{n^2+n^2}{n^3}\right)^2 = \frac{4}{n^2},$$

bo $1 \leq n^2$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

(l) Sposób 1. Ponieważ $\sin 0 = 0$ oraz $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ oraz na przedziale $(0, \frac{1}{2}\pi)$ funkcja sinus jest wklęsła, pisząc wzór prostej przechodzącej przez dwa punkty, można nietrudno sprawdzić, że $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \leq \sin \frac{1}{n},$$

bo $\frac{1}{n} \in [0, \frac{1}{2}\pi]$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$.

Sposób 2. Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

(przypomnijmy, że $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$) i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$.

(m) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$0 \leq \frac{2 + (-1)^n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^2}$.

(n) Raz jeszcze wykorzystamy nierówność $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ dla $x \in [0, \frac{1}{2}\pi]$. Ponieważ dla $n \in \mathbb{N}$ mamy $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \frac{1}{2}\pi]$, z powyższej nierówności otrzymujemy

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}}{\cos \frac{1}{\sqrt{n}}} \geq \sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, rozbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}})$.

(o) Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}} \cdot n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-1/n}$.

16.6 (a) Rozkładając ułamek

$$\frac{1}{n(n+1)}$$

na ułamki proste, otrzymujemy

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Zatem k -ta suma częściowa s_k rozważanego szeregu jest równa

$$s_k = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = 1.$$

(b) Ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego, otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

(c) Zauważmy, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Drugi z tych szeregów jest szeregiem geometrycznym oraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Pozostaje nam zsumować pierwszy z powyższych szeregów. Zauważmy, że można go przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} &= \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2^3} + \dots \end{aligned}$$

Stąd

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2^k}}{1 - \frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

Ostatecznie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 4 - 1 = 3.$$

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1993.
- L. Bourchtein, A. Bourchtein, *Theory of infinite sequences and series*, Springer Nature, 2022.
- A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 2000.
- B. P. Demidowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2020.
- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 2*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985.
- S. Gniłka, K. Nowakowski, D. Stachowiak-Gniłka, *Zbiór zadań z matematyki dla chemików, Część pierwsza*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 1997.

- M. Lassak, *Zadania z analizy matematycznej*, Wydawnictwo Wspierania Procesu Edukacji, Warszawa, 2003.
- W. J. Kaczor, M. T. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej: liczby rzeczywiste, ciągi i szeregi liczbowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2005.
- W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- A. Przestacki, *Analiza matematyczna I – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2020.
- W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1976.
- J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2013.
- *Why $\cos n$ does not converge as n tends to infinity?*, <https://math.stackexchange.com/questions/1139021/prove-cosn-does-not-converge-as-n-tends-to-infinity>, dostęp: 28.01.2023