

GRANICA CIĄGU

TEORIA

CIĄGIEM $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy przyporządkowanie, które każdej liczbie naturalnej n przyporządkowuje liczbę rzeczywistą a_n . Innymi słowy ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest funkcją z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$. Liczby $a_1, a_2, \dots$ nazywamy *wyrazami ciągu* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a element a_n nazywamy *wyrazem ogólnym*.

GRANICA CIĄGU. Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma granicę $g \in \mathbb{R}$, co zapisujemy symbolicznie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, jeżeli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ możemy znaleźć taki wskaźnik $N \in \mathbb{N}$, że $|a_n - g| \leq \varepsilon$ dla każdego $n \geq N$. Ciąg, który posiada granicę $g \in \mathbb{R}$ nazywamy *zbieżnym*.

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma granicę $+\infty$, co zapisujemy symbolicznie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taki wskaźnik $N \in \mathbb{N}$, że $a_n \geq M$ dla każdego $n \geq N$. Ciąg, który ma granicę $+\infty$, nazywamy *rozbieżnym do plus nieskończoności*.

Mówimy, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma granicę $-\infty$, co zapisujemy symbolicznie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, jeżeli dla każdej liczby $M > 0$ możemy znaleźć taki wskaźnik $N \in \mathbb{N}$, że $a_n \leq -M$ dla każdego $n \geq N$. Ciąg, który ma granicę $-\infty$, nazywamy *rozbieżnym do minus nieskończoności*.

GRANICA CIĄGU: UWAGA. Niech $a \in \mathbb{R}$. Wprost z definicji granicy ciągu wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$. W szczególności $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

PODCIĄG. Niech dany będzie ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Każdy ciąg postaci $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \dots$ (który symbolicznie możemy zapisać jako $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$), gdzie $n_k \in \mathbb{N}$ oraz $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots$ nazywamy *podciągiem* ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

GRANICA PODCIĄGU. Jeżeli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ posiada granicę (skończoną lub nieskończoną) g , to również każdy jego podciąg posiada granicę równą g . Innymi słowy, jeżeli pewne dwa podciągi tego samego ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są zbieżne do *różnych* granic, to ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *nie* posiada granicy.

GRANICA I NIERÓWNOŚCI. Jeżeli wyrazy ogólne ciągów $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniają nierówność $a_n \leq b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, to $a \leq b$.

UWAGA: Choć przejście do granicy ciągów zachowuje nierówności, nie zachowuje ich „ostrości”, tzn. nawet jeżeli $a_n < b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to nie możemy twierdzić, że $a < b$. Wystarczy bowiem zauważyć, że wyrazu ciągu $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ są dodatnie, ale $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH. Jeżeli wyrazy ogólne ciągów $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz jeżeli ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mają wspólną granicę $g \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$, to ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ma tę samą granicę, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

DZIAŁANIA ARYTMETYCZNE NA CIĄGACH ZBIEŻNYCH. Jeżeli ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są zbieżne odpowiednio do liczb a oraz b , tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to

- ciąg $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do $a + b$, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$,
- ciąg $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do $a - b$, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b$,
- ciąg $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do $a \cdot b$, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$,
- ciąg $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ zbiega do $\frac{a}{b}$, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, o ile $b \neq 0$ oraz $b_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$.

SYMBOLE NIEOZNACZONE. W powyższym twierdzeniu ograniczyliśmy się do ciągów zbieżnych z uwagi na możliwość wystąpienia tzw. *symboli nieoznaczonych*, które, jak wskazuje nazwa, nie mają jednoznacznie ustalonej wartości. Symbolami nieoznaczonymi są: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , 1^∞ , ∞^0 .

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy

- *rosnącym*, gdy $a_n < a_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- *malejącym*, gdy $a_{n+1} < a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- *niemalejącym*, gdy $a_n \leq a_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- *nierosnącym*, gdy $a_{n+1} \leq a_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

OGRANICZONOŚĆ CIĄGU. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy

- *ograniczonym z dołu*, gdy istnieje taka liczba $m \in \mathbb{R}$, że $m \leq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$,
- *ograniczonym z góry*, gdy istnieje taka liczba $M \in \mathbb{R}$, że $a_n \leq M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$,
- *ograniczonym*, gdy jest on ograniczony z dołu i z góry.

UWAGA: Definicję ograniczoności ciągu możemy podać również w następujący równoważny sposób: ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest *ograniczony*, gdy istnieje taka liczba $M > 0$, że $|a_n| \leq M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

OGRANICZONOŚĆ CIĄGU A ISTNIENIE GRANICY. Każdy ciąg zbieżny do granicy skończonej jest ograniczony. Odwrotne twierdzenie nie jest prawdziwe, bowiem ciąg o wyrazie ogólnym $(-1)^n$ jest ograniczony, ale nie posiada granicy. Jeżeli jednak do ograniczoności „dorzucimy” monotoniczność, to otrzymamy następujące wyniki:

- ciąg niemalejący (rosnący) i ograniczony z góry posiada granicę skończoną,
- ciąg nierosnący (malejący) i ograniczony z dołu posiada granicę skończoną.

WAŻNE GRANICE. Poniżej zebrano podstawowe granice ciągów:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1,$ jeżeli $a > 0,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0,$ jeżeli $|a| < 1,$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e,$ jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oraz $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}.$

ZADANIA

Zadanie 15.1. Korzystając z definicji granicy ciągu pokaż, że

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{n} = 0, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n + 1} = 2, \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Zadanie 15.2. Pokaż, że ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę, tzn. jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b,$ gdzie $a, b \in \mathbb{R},$ to $a = b.$

Zadanie 15.3. Pokaż, że jeżeli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do liczby $a,$ to $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$

Zadanie 15.4. Oblicz następujące granice:

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2n - 1}{2n^2 - n + 1}, & (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5n - 7}{-n^2 - n + 4}, \\ (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^2 + n + 2}{2n^2 + 4n - 5}, & (g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot 9^n - 1}{4 \cdot 9^n + 7}, \\ (c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 1}{-2n^3 + 7n^2 + 2}, & (h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 6 \cdot 5^n}{2 + 2 \cdot 5^n}, \\ (d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^2 + 2n - 8}{3n^3 - 4n^2 + 5}, & (i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 5^{n+1}}{4^n - 5^{n+1}}, \\ (e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - n}{n^2 + 7n - 9}, & (j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^{n+2}}{3^{n+2} + 5}. \end{array}$$

Zadanie 15.5. Oblicz następujące granice:

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}), & (g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n} - 2n}, \\ (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+3}), & (h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n - \sqrt{9n^2 + 5n}}, \\ (c) \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n}), & (i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+n^2} - \sqrt{1+4n^2}}{n}, \\ (d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n), & (j) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+9n^2} - \sqrt{1+n^2}}, \\ (e) \lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 9n + 18}), & \\ (f) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 8n + 12} - 2n), & \end{array}$$

Zadanie 15.6. Oblicz następujące granice:

- | | |
|--|--|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n,$ | (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-6}\right)^{4n-7},$ |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n,$ | (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n^2}{5-n^2}\right)^{2n^2},$ |
| (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n,$ | (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{\frac{1}{2}n^2},$ |
| (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$ | (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{3n^2+n-1},$ |
| (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-5}{3n+7}\right)^{2n+5},$ | (j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+2}{3n^2-4}\right)^{2n^2-n+5}.$ |

Zadanie 15.7. Oblicz następujące granice:

- | | | | |
|--|--|--|--|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n^4}{\log_8 n^2},$ | (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_9 n^3}{\log_3 n^6},$ | (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}},$ | (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}.$ |
|--|--|--|--|

Zadanie 15.8. Oblicz następujące granice:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right),$
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2-3+4+5-6+7+8-9+\dots-3n}{n^2+n+1}.$

Zadanie 15.9. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, oblicz następujące granice:

- | | |
|---|---|
| (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n},$ | (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n},$ |
| (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n},$ | (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n}.$ |

Zadanie 15.10. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}.$

Zadanie 15.11. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach wykaż, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

Zadanie 15.12. Na podstawie twierdzenia o trzech ciągach wykaż, że jeżeli ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny do zera, a ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

Zadanie 15.13. Pokaż, że ciąg o wyrazie ogólnym a_n nie posiada granicy, gdy

(a) $a_n = (-1)^n$,

(c) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$,

(b) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2 - (-1)^n}$,

(d) $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$.

Zadanie 15.14. Zbadaj monotoniczność i ograniczoność ciągu o wyrazie ogólnym a_n , jeżeli

(a) $a_n = 3n - 2$,

(c) $a_n = \frac{-3n + 1}{1 - 2n}$,

(e) $a_n = \frac{n}{2^n}$,

(b) $a_n = -5n + 3$,

(d) $a_n = \frac{2n - 1}{n + 1}$,

(f) $a_n = \frac{2^n}{n!}$.

Zadanie 15.15. Wykaż, że ciąg

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad \dots$$

posiada granicę skończoną.

ROZWIĄZANIA

- 15.1 (a) Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Niech N będzie liczbą naturalną większą lub równą od $3\varepsilon^{-1}$. Wtedy dla każdego $n \geq N$ mamy $\frac{3}{n} \leq \varepsilon$ i w konsekwencji

$$\left| \frac{2 + (-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{2 + (-1)^n}{n} \right| \leq \frac{3}{n} \leq \varepsilon.$$

Oznacza to, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n}{n} = 0.$$

- (b) Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Niech N będzie liczbą naturalną większą lub równą od $(1 - \varepsilon)\varepsilon^{-1}$. Wtedy dla każdego $n \geq N$ mamy $1 - \varepsilon \leq n\varepsilon$ i w konsekwencji

$$\frac{1}{n + 1} \leq \varepsilon.$$

Zatem dla $n \geq N$ otrzymujemy

$$\left| \frac{2n + 1}{n + 1} - 2 \right| = \left| \frac{-1}{n + 1} \right| \leq \frac{1}{n + 1} \leq \varepsilon.$$

To dowodzi, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n + 1} = 2.$$

- (c) Ustalmy dowolną liczbę $M > 0$ oraz niech N będzie liczbą naturalną większą lub równą od $\log_2^2 M$. Wtedy dla $n \geq N$ mamy $\sqrt{n} \geq \log_2 M$ i w konsekwencji $2^{\sqrt{n}} \geq 2^{\log_2 M} = M$. Oznacza to, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty.$$

15.2 Przypomnijmy, że *nierównośćią trójkąta* nazywamy nierówność

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

prawdziwą dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Chcemy oszacować odległość liczb a i b , czyli wyrażenie $|a - b|$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ dzięki nierówności trójkąta otrzymujemy

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b|.$$

Traktujemy wyrażenie $|a - b|$ jako ciąg stały możemy w powyższej nierówności przejść do granicy. Dostajemy

$$|a - b| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a - b| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a - a_n| + \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - b| = 0,$$

bo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

Zatem $|a - b| = 0$, co pokazuje, że $a = b$.

15.3 Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Z założenia wynika, że istnieje liczba $N \in \mathbb{N}$ taka, że $|a_n - a| \leq \varepsilon$ dla $n \geq N$. Wtedy dla $n \geq N$ mamy również

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \leq \varepsilon.$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

15.4 (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2n - 1}{2n^2 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{4n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{2n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 - 0}{2 - 0 + 0} = 2$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^2 + n + 2}{2n^2 + 4n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{-6n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{2n^2}{n^2} + \frac{4n}{n^2} - \frac{5}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{4}{n} - \frac{5}{n^2}} = \frac{-6 + 0 + 0}{2 + 0 - 0} = -3$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n + 1}{-2n^3 + 7n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{3n^2}{n^3} + \frac{5n}{n^3} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{-2n^3}{n^3} + \frac{7n^2}{n^3} + \frac{2}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{-2 + \frac{7}{n} + \frac{2}{n^3}} = \frac{0 + 0 + 0}{-2 + 0 + 0} = 0$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^2 + 2n - 8}{3n^3 - 4n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{-5n^2}{n^3} + \frac{2n}{n^3} - \frac{8}{n^3} \right)}{n^3 \left(\frac{3n^3}{n^3} - \frac{4n^2}{n^3} + \frac{5}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-5}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{8}{n^3}}{3 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^3}} = \frac{0 + 0 - 0}{3 - 0 + 0} = 0$$

(e)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 - n}{n^2 + 7n - 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{n^3}{n^2} + \frac{2n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{7n}{n^2} - \frac{9}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{7}{n} - \frac{9}{n^2}} = \frac{+\infty + 2 - 0}{1 + 0 - 0} = +\infty$$

(f)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 5n - 7}{-n^2 - n + 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{n^3}{n^2} - \frac{5n}{n^2} - \frac{7}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{-n^2}{n^2} - \frac{n}{n^2} + \frac{4}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \frac{5}{n} - \frac{7}{n^2}}{-1 - \frac{1}{n} + \frac{4}{n^2}} = \frac{+\infty - 0 - 0}{-1 - 0 + 0} = -\infty$$

(g)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot 9^n - 1}{4 \cdot 9^n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^n \left(\frac{8 \cdot 9^n}{9^n} - \frac{1}{9^n} \right)}{9^n \left(\frac{4 \cdot 9^n}{9^n} + \frac{7}{9^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 - \frac{1}{9^n}}{4 + \frac{7}{9^n}} = \frac{8 - 0}{4 + 0} = 2$$

(h)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 6 \cdot 5^n}{2 + 2 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{3}{5^n} - \frac{6 \cdot 5^n}{5^n} \right)}{5^n \left(\frac{2}{5^n} + \frac{2 \cdot 5^n}{5^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{5^n} - 6}{\frac{2}{5^n} + 2} = \frac{0 - 6}{0 + 2} = -3$$

(i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 5^{n+1}}{4^n - 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{3}{5^n} + \frac{5^{n+1}}{5^n} \right)}{5^n \left(\frac{4^n}{5^n} - \frac{5^{n+1}}{5^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{5^n} + 5}{\left(\frac{4}{5} \right)^n - 5} = \frac{0 + 5}{0 - 5} = -1$$

(j)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^{n+2}}{3^{n+2} + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(\frac{2^{n+1}}{3^n} - \frac{3^{n+2}}{3^n} \right)}{3^n \left(\frac{3^{n+2}}{3^n} + \frac{5}{3^n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \left(\frac{2}{3} \right)^n - 3^2}{3^2 + \frac{5}{3^n}} = \frac{0 - 9}{9 + 0} = -1$$

15.5 (a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) - n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+3}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+3}}{1} \cdot \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - (n+3)}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{n} + \sqrt{n+3}} = \frac{-3}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sqrt{n^2 + 5n}}{1} \cdot \frac{n + \sqrt{n^2 + 5n}}{n + \sqrt{n^2 + 5n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 + 5n)}{n + \sqrt{n^2 + 5n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n}{n + \sqrt{n^2 + 5n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n}{n + \sqrt{n^2(1 + \frac{5}{n})}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n}{n + n\sqrt{1 + \frac{5}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{n}}} = \frac{-5}{1 + \sqrt{1 + 0}} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 3n} - n}{1} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 3n} + n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - n^2}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2 + 3n} + n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{3}{n})} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + 1} = \frac{3}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 9n + 18}) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 9n + 18}}{1} \cdot \frac{3n + \sqrt{9n^2 + 9n + 18}}{3n + \sqrt{9n^2 + 9n + 18}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)^2 - (9n^2 + 9n + 18)}{3n + \sqrt{9n^2 + 9n + 18}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 - 9n^2 - 9n - 18}{3n + \sqrt{9n^2 + 9n + 18}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9n - 18}{3n + \sqrt{9n^2 + 9n + 18}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9n - 18}{3n + \sqrt{n^2(9 + \frac{9}{n} + \frac{18}{n^2})}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9n - 18}{3n + n\sqrt{9 + \frac{9}{n} + \frac{18}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-9 - \frac{18}{n}}{3 + \sqrt{9 + \frac{9}{n} + \frac{18}{n^2}}} \\&= \frac{-9 - 0}{3 + \sqrt{9 + 0 + 0}} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 8n + 12} - 2n) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 8n + 12} - 2n}{1} \cdot \frac{\sqrt{4n^2 + 8n + 12} + 2n}{\sqrt{4n^2 + 8n + 12} + 2n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 8n + 12 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 8n + 12} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n + 12}{\sqrt{n^2(4 + \frac{8}{n} + \frac{12}{n^2})} + 2n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n + 12}{n\sqrt{4 + \frac{8}{n} + \frac{12}{n^2}} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{12}{n}}{\sqrt{4 + \frac{8}{n} + \frac{12}{n^2}} + 2} \\&= \frac{8 + 0}{\sqrt{4 + 0 + 0} + 2} = \frac{8}{4} = 2\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n} - 2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n} - 2n} \cdot \frac{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}{(4n^2 + n) - 4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2(4 + \frac{1}{n})} + 2n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2n}{n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2 = \sqrt{4 + 0} + 2 = 2 + 2 = 4
\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n - \sqrt{9n^2 + 5n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n - \sqrt{9n^2 + 5n}} \cdot \frac{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}}{(3n)^2 - (9n^2 + 5n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}}{9n^2 - 9n^2 - 5n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sqrt{n^2(9 + \frac{5}{n})}}{-5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + n\sqrt{9 + \frac{5}{n}}}{-5n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sqrt{9 + \frac{5}{n}}}{-5} = \frac{3 + \sqrt{9 + 0}}{-5} = \frac{3 + 3}{-5} = -\frac{6}{5}
\end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + n^2} - \sqrt{1 + 4n^2}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + n^2} - \sqrt{1 + 4n^2}}{n} \cdot \frac{\sqrt{1 + n^2} + \sqrt{1 + 4n^2}}{\sqrt{1 + n^2} + \sqrt{1 + 4n^2}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + n^2) - (1 + 4n^2)}{n(\sqrt{1 + n^2} + \sqrt{1 + 4n^2})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2}{n(\sqrt{1 + n^2} + \sqrt{1 + 4n^2})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{\sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} + \sqrt{n^2(4 + \frac{1}{n^2})}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{-3}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{4 + 0}} = \frac{-3}{1 + 2} = -1
\end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+9n^2} - \sqrt{1+n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{1+9n^2} - \sqrt{1+n^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+9n^2} + \sqrt{1+n^2}}{\sqrt{1+9n^2} + \sqrt{1+n^2}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{1+9n^2} + \sqrt{1+n^2})}{(1+9n^2) - (1+n^2)} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{1+9n^2} + \sqrt{1+n^2})}{8n^2} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+9n^2} + \sqrt{1+n^2}}{8n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2(9 + \frac{1}{n^2})} + \sqrt{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}}{8n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} + n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{8n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}{8} \\&= \frac{\sqrt{9+0} + \sqrt{1+0}}{8} = \frac{3+1}{8} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

15.6 (a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{n}\right)^{\frac{n}{-2}}\right]^{-2} = e^{-2}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{5}}\right]^5 = e^5$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{-3} = e^{-3}$$

(d)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n}\right)^{\frac{n}{-1}} = e$$

(e) Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-5}{3n+7}\right)^{2n+5} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+7-12}{3n+7}\right)^{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+7}{3n+7} + \frac{-12}{3n+7}\right)^{2n+5} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-12}{3n+7}\right)^{\frac{3n+7}{-12}}\right]^{\frac{-12}{3n+7} \cdot (2n+5)} = e^{-8},\end{aligned}$$

ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-12(2n+5)}{3n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-24n-60}{3n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-24 - \frac{60}{n}}{3 + \frac{7}{n}} = \frac{-24}{3} = -8.$$

(f) Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-6} \right)^{4n-7} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-6+9}{2n-6} \right)^{4n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-6}{2n-6} + \frac{9}{2n-6} \right)^{4n-7} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{9}{2n-6} \right)^{\frac{2n-6}{9}} \right]^{\frac{9}{2n-6} \cdot (4n-7)} = e^{18},\end{aligned}$$

ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9(4n-7)}{2n-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36n-63}{2n-6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36 - \frac{63}{n}}{2 - \frac{6}{n}} = \frac{36}{2} = 18.$$

(g) Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n^2}{5-n^2} \right)^{2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5-n^2-4}{5-n^2} \right)^{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5-n^2}{5-n^2} + \frac{-4}{5-n^2} \right)^{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-4}{5-n^2} \right)^{\frac{5-n^2}{-4}} \right]^{\frac{-4}{5-n^2} \cdot 2n^2} = e^8,\end{aligned}$$

ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 \cdot 2n^2}{5-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8n^2}{5-n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-8}{1 - \frac{5}{n^2}} = 8.$$

(h) Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+3} \right)^{\frac{1}{2}n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3-2}{n^2+3} \right)^{\frac{1}{2}n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3}{n^2+3} + \frac{-2}{n^2+3} \right)^{\frac{1}{2}n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{n^2+3} \right)^{\frac{n^2+3}{-2}} \right]^{\frac{-2}{n^2+3} \cdot \frac{1}{2}n^2} = e^{-1},\end{aligned}$$

ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}n^2}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 + \frac{3}{n^2}} = -1.$$

(i) Mamy

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1} \right)^{3n^2+n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+1-2}{2n^2+1} \right)^{3n^2+n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+1}{2n^2+1} + \frac{-2}{2n^2+1} \right)^{3n^2+n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-2}{2n^2+1} \right)^{\frac{2n^2+1}{-2}} \right]^{\frac{-2}{2n^2+1} \cdot (3n^2+n-1)} = e^{-3},\end{aligned}$$

ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot (3n^2+n-1)}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6n^2-2n+2}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-6 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = -3.$$

(j) Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 2}{3n^2 - 4} \right)^{2n^2 - n + 5} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 4 + 6}{3n^2 - 4} \right)^{2n^2 - n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 4}{3n^2 - 4} + \frac{6}{3n^2 - 4} \right)^{2n^2 - n + 5} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{6}{3n^2 - 4} \right)^{\frac{3n^2 - 4}{6}} \right]^{\frac{6}{3n^2 - 4} \cdot (2n^2 - n + 5)} = e^4, \end{aligned}$$

ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot (2n^2 - n + 5)}{3n^2 - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12n^2 - 6n + 30}{3n^2 - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 - \frac{6}{n} + \frac{30}{n^2}}{3 - \frac{4}{n^2}} = 4.$$

15.7 (a)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n^4}{\log_8 n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \log_2 n}{2 \log_8 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \log_2 n}{2 \cdot \frac{\log_2 n}{\log_2 8}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \log_2 n}{2 \cdot \frac{\log_2 n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \log_2 n}{\frac{2}{3} \log_2 n} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_9 n^3}{\log_3 n^6} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \log_9 n}{6 \log_3 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{\log_3 n}{\log_3 9}}{6 \log_3 n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot \frac{\log_3 n}{2}}{6 \log_3 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} \cdot \log_3 n}{6 \log_3 n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^2)^{\log_3 n}}{(2^2)^{\log_2 n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2 \log_3 n}}{2^{2 \log_2 n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\log_3 n^2}}{2^{\log_2 n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

(d)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^3)^{\log_3 n}}{(2^4)^{\log_2 n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{3 \log_3 n}}{2^{4 \log_2 n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\log_3 n^3}}{2^{\log_2 n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{aligned}$$

15.8 (a) Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ możemy iloczyn

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

zapisać w postaci

$$\begin{aligned} &\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Zatem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

- (b) Korzystając z rozkładu na ułamki proste łatwo zauważyć, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi równość

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

- (c) Zauważmy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \cdots - 3n \\ = (1 + 2 - 3) + (4 + 5 - 6) + (7 + 8 - 9) + \cdots + [(3n-1) + (3n-2) - 3n] \\ = 0 + 3 + 6 + \cdots + 3n - 3. \end{aligned}$$

Korzystając teraz ze wzoru na sumę ciągu arytmetycznego:

$$r + 2r + \cdots + mr = \frac{1}{2}rm(m+1),$$

dostajemy

$$1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \cdots - 3n = \frac{3}{2}(n-1)n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n.$$

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \cdots - 3n}{n^2 + n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n}{n^2 + n + 1} = \frac{3}{2}.$$

- 15.9** (a) Zauważmy, że dla dużych n w wyrażeniu

$$\sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}$$

dominującym składnikiem jest 10^n , bo rośnie najszybciej. Przykładowo, dla $n = 5$ mamy

$$10^5 = 100\,000, \quad 9^5 = 59\,049, \quad 8^5 = 32\,768,$$

a dla $n = 7$ mamy już

$$10^7 = 10\,000\,000, \quad 9^7 = 4\,782\,969, \quad 8^7 = 2\,097\,152.$$

Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, pokażemy zatem, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n} = 10.$$

Po pierwsze zauważmy, że składniki 9^n oraz 8^n są dodatnie. Stąd

$$10^n \leq 10^n + 9^n + 8^n.$$

Zatem

$$10 = \sqrt[n]{10^n} \leq \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n}.$$

Z drugiej strony, ponieważ $9^n \leq 10^n$ oraz $8^n \leq 10^n$, więc

$$10^n + 9^n + 8^n \leq 10^n + 10^n + 10^n = 3 \cdot 10^n,$$

skąd

$$\sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 10^n} = 10 \sqrt[n]{3}.$$

Podsumowując, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy oszacowanie

$$10 \leq \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n} \leq 10 \sqrt[n]{3}.$$

Wiemy też, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1.$$

Stosujemy więc twierdzenie o trzech ciągach i otrzymujemy

$$10 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n} 10 \cdot 1 = 10.$$

Wynika z tego, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n + 9^n + 8^n} = 10.$$

(b) Dla dużych n w wyrażeniu

$$\sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n}$$

dominującym składnikiem jest 7^n , ponieważ rośnie najszybciej. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, pokażemy zatem, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 6^n + 7^n} = 7.$$

Po pierwsze zauważmy, że składniki 5^n oraz 6^n są dodatnie. Stąd

$$7^n \leq 7^n + 6^n + 5^n.$$

Zatem

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \leq \sqrt[n]{7^n + 6^n + 5^n}.$$

Z drugiej strony, ponieważ $6^n \leq 7^n$ oraz $5^n \leq 7^n$, to

$$7^n + 6^n + 5^n \leq 7^n + 7^n + 7^n = 3 \cdot 7^n,$$

skąd

$$\sqrt[n]{7^n + 6^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 7^n} = 7 \sqrt[n]{3}.$$

Podsumowując, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy oszacowanie

$$7 \leq \sqrt[n]{7^n + 6^n + 5^n} \leq 7 \sqrt[n]{3}.$$

Wiemy też, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1.$$

Z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy więc

$$7 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n + 6^n + 5^n} \leq 7 \cdot 1 = 7.$$

Wynika z tego, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7^n + 6^n + 5^n} = 7.$$

(c) Dla dużych n w wyrażeniu

$$\sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

dominującym składnikiem jest $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, ponieważ maleje najwolniej. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, pokażemy zatem, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

Najpierw zauważmy, że składniki $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ oraz $\left(\frac{1}{6}\right)^n$, a także ich odpowiednie wielokrotności, są dodatnie. W związku z tym mamy

$$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n.$$

Stąd

$$\frac{1}{2} \sqrt[n]{5} = \sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} \leq \sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n}.$$

Z drugiej strony, ponieważ

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{6}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

więc

$$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \leq (5 + 3 + 2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Zatem

$$\sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n} \leq \sqrt[n]{10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{10}.$$

Podsumowując, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy oszacowanie

$$\frac{1}{2} \sqrt[n]{5} \leq \sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n} \leq \frac{1}{2} \sqrt[n]{10}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1,$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n} \leq \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Wynika z tego, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n} = \frac{1}{2}.$$

(d) Dla dużych n w wyrażeniu

$$\sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n}$$

dominującym składnikiem jest $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, ponieważ maleje najwolniej. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, pokażemy zatem, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{1}{3}.$$

Najpierw zauważmy, że składniki $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ oraz $\left(\frac{1}{7}\right)^n$, a także ich odpowiednie wielokrotności, są dodatnie. W związku z tym mamy

$$4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n.$$

Stąd

$$\frac{1}{3} \sqrt[n]{4} = \sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} \leq \sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n}.$$

Z drugiej strony, ponieważ

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \left(\frac{1}{7}\right)^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

więc

$$4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n \leq (4 + 6 + 2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Zatem

$$\sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n} \leq \sqrt[n]{12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} \sqrt[n]{12}.$$

Podsumowując, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy oszacowanie

$$\frac{1}{3} \sqrt[n]{4} \leq \sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n} \leq \frac{1}{3} \sqrt[n]{12}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{12} = 1,$$

więc z twierdzenia o trzech ciągach dostajemy

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n} \leq \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Wynika z tego, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{1}{3}.$$

15.10 Zaczniemy od dokładniejszego przyjrzenia się ułamkowi

$$\frac{n!}{n^n}.$$

Oczywiście możemy go zapisać w postaci

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n \cdot n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n}.$$

Ponieważ

$$\frac{k}{n} \leq 1$$

dla $1 \leq k \leq n$, dostajemy

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zwróćmy także uwagę, że mnożąc liczby naturalne, zawsze otrzymujemy liczbę naturalną. W związku z tym dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy również

$$0 \leq \frac{n!}{n^n},$$

co prowadzi do oszacowania

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}$$

Korzystając z faktu, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

i stosując twierdzenie o trzech ciągach, dochodzimy ostatecznie do wniosku, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

15.11 Zauważmy, że wyraz ogólny rozważanego ciągu można zapisać w postaci

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}.$$

Ponieważ

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

dla każdego $k \in \{1, \dots, n\}$ mamy

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq a_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Ponadto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 1$$

i podobnie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1.$$

Na mocy twierdzenia o trzech ciągach stwierdzamy więc, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

15.12 Z założenia ciąg $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym. Istnieje zatem stała $M > 0$ taka, że $|b_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $0 \leq |a_n b_n| \leq |a_n| \cdot |b_n| \leq M|a_n|$ dla $n \in \mathbb{N}$. Korzystając teraz z twierdzenia o trzech ciągach oraz faktu, że $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n| = 0$, co jest równoważne stwierdzeniu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

- 15.13** (a) Rozważmy dwa podciągi $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ oraz $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wtedy $a_{2k} = 1$ oraz $a_{2k-1} = -1$ dla $k \in \mathbb{N}$, co implikuje, że $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$ oraz $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -1$. Oznacza to, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zawiera dwa podciągi zbieżne do różnych granic, a zatem nie może być zbieżny.
- (b) Rozumując podobnie jak w powyższym podpunkcie, wystarczy wskazać dwa podciągi ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżne do różnych granic. Tymi podciągami są $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ oraz $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$, bowiem $a_{2k} = 2$ i $a_{2k-1} = 0$ dla $k \in \mathbb{N}$.
- (c) Rozumując podobnie jak w podpunkcie (a), wystarczy wskazać dwa podciągi ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżne do różnych granic. Tymi podciągami są $(a_{4k})_{k \in \mathbb{N}}$ oraz $(a_{4k+1})_{k \in \mathbb{N}}$, bowiem $a_{4k} = 0$ oraz $a_{4k+1} = 1$ dla $k \in \mathbb{N}$.
- (d) Rozumując podobnie jak w podpunkcie (a), wystarczy wskazać dwa podciągi ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżne do różnych granic. Tymi podciągami są $(a_{4k})_{k \in \mathbb{N}}$ oraz $(a_{4k+1})_{k \in \mathbb{N}}$, bowiem $a_{4k} = 1$ oraz $a_{4k+1} = 0$ dla $k \in \mathbb{N}$.

15.14 W podpunktach (a) i (b) skorzystamy z bardzo ważnego faktu, którego tutaj nie będziemy udowadniać (nie jest to takie oczywiste!): *zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ jest nieograniczonym podzbiorem zbioru liczb $\mathbb{R}$.*

- (a) Zaczniemy od zbadania monotoniczności ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Obliczmy różnicę między kolejnymi wyrazami

$$a_{n+1} - a_n = [3(n+1) - 2] - (3n - 2) = 3n + 3 - 2 - 3n + 2 = 3 > 0.$$

Oznacza to, że każdy kolejny wyraz jest większy od poprzedniego, tzn. $a_{n+1} > a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnący. Skoro ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rośnie, to naturalnie jest ograniczony z dołu przez np. pierwszy wyraz $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.

Z drugiej strony widać, że ciąg nie ma ograniczenia górnego, ponieważ jego wartości rosną w nieskończoność. Gdyby bowiem istniała liczba $M \in \mathbb{R}$ taka, że $a_n \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$, oznaczałoby to, że każda liczba naturalna n musiałaby spełniać nierówność

$$n \leq \frac{1}{3}(M + 2).$$

W takim wypadku zbiór liczb naturalnych byłby ograniczony z góry, a wiemy, że tak nie jest. Dlatego ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest ograniczony z góry.

- (b) Zaczniemy od zbadania monotoniczności ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Obliczmy różnicę między kolejnymi wyrazami

$$a_{n+1} - a_n = [-5(n+1) + 3] - (-5n + 3) = -5n - 5 + 3 + 5n - 3 = -5 < 0.$$

Oznacza to, że każdy kolejny wyraz jest mniejszy od poprzedniego, tzn. $a_{n+1} < a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest malejący. Skoro ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ maleje, to naturalnie jest ograniczony z góry np. przez pierwszy wyraz $a_1 = -5 \cdot 1 + 3 = -2$.

Z drugiej strony widać, że ciąg nie ma ograniczenia z dołu, ponieważ jego wartości maleją w nieskończoność. Gdyby bowiem istniała liczba $m \in \mathbb{R}$ taka, że $m \leq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, oznaczałoby to, że każda liczba naturalna n musiałaby spełniać nierówność

$$n \leq \frac{1}{5}(3 - m).$$

W takim wypadku zbiór liczb naturalnych byłby ograniczony z góry, a wiemy, że tak nie jest. Dlatego ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nie jest ograniczony z dołu.

- (c) Zaczniemy od zbadania monotoniczności ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Przekształćmy najpierw wyraz ogólny a_n do postaci

$$a_n = \frac{-3n+1}{1-2n} = \frac{3n-1}{2n-1}.$$

(Krok ten nie jest konieczny, ale dzięki niemu dalsze obliczenia będą łatwiejsze.) Obliczmy różnicę między kolejnymi wyrazami:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)-1}{2(n+1)-1} - \frac{3n-1}{2n-1} \\ &= \frac{3n+2}{2n+1} - \frac{3n-1}{2n-1} \\ &= \frac{(3n+2)(2n-1) - (3n-1)(2n+1)}{(2n+1)(2n-1)} \\ &= \frac{6n^2 - 3n + 4n - 2 - (6n^2 + 3n - 2n - 1)}{(2n+1)(2n-1)} \\ &= \frac{-1}{(2n+1)(2n-1)} < 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że każdy kolejny wyraz jest mniejszy od poprzedniego, tzn. $a_{n+1} < a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest malejący. Skoro ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ maleje, to naturalnie jest ograniczony z góry przez np. pierwszy wyraz

$$a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1 - 1} = 2.$$

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest również ograniczony z dołu, bowiem dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_n = \frac{3n-1}{2n-1} \geq \frac{3n-1}{2n} = \frac{2n+(n-1)}{2n} \geq \frac{2n}{2n} = 1.$$

- (d) Zaczniemy od zbadania monotoniczności ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Obliczmy różnicę między kolejnymi wyrazami

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{2n-1}{n+1} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2n^2 + 2n + n + 1 - (2n^2 + 4n - n - 2)}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że każdy kolejny wyraz jest większy od poprzedniego, tzn. $a_{n+1} > a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnący. Skoro ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rośnie, to naturalnie jest ograniczony z dołu przez np. pierwszy wyraz

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1 + 1} = 0.$$

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest również ograniczony z góry, bowiem dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2n}{n+1} \leq \frac{2n}{n} = 2.$$

- (e) Zaczniemy od zbadania monotoniczności ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Obliczmy różnicę między kolejnymi wyrazami:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n}{2^n} = \frac{n+1-2n}{2^{n+1}} = \frac{1-n}{2^{n+1}} \leq 0.$$

Oznacza to, że każdy kolejny wyraz jest mniejszy lub równy od poprzedniego, tzn. $a_{n+1} \leq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący. (Można z łatwością pokazać, że począwszy od drugiego wyrazu jest on malejący.) Skoro ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący, to naturalnie jest ograniczony z góry przez np. pierwszy wyraz

$$a_1 = \frac{1}{2}.$$

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest również ograniczony z dołu, bowiem dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_n = \frac{n}{2^n} \geq 0.$$

- (f) Zaczniemy od zbadania monotoniczności ciągu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Obliczmy różnicę między kolejnymi wyrazami:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n}{n!} = \frac{2^{n+1} - 2^n(n+1)}{(n+1)!} = \frac{2^n(2-n-1)}{(n+1)!} = \frac{2^n(1-n)}{(n+1)!} \leq 0.$$

Oznacza to, że każdy kolejny wyraz jest mniejszy lub równy od poprzedniego, tzn. $a_{n+1} \leq a_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący. (Można z łatwością pokazać,

że począwszy od drugiego wyrazu jest on malejący.) Skoro ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący, to naturalnie jest ograniczony z góry przez np. pierwszy wyraz

$$a_1 = \frac{2}{1!} = 2.$$

Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest również ograniczony z dołu, bowiem dla $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$a_n = \frac{2^n}{n!} \geq 0.$$

15.15 Nietrudno zauważyć, że ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest rosnący, bowiem funkcja $x \mapsto \sqrt{x}$ jest rosnąca na $[0, +\infty)$. Pokażemy teraz, że ciąg ten jest ograniczony z góry przez 2. Oczywiście $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ oraz

$$a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \leq \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

Ponieważ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, to rozumując podobnie możemy pokazać, że

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2.$$

(Jeżeli chcielibyśmy przedstawić powyższe oszacowanie w sposób bardziej formalny i „ładny”, moglibyśmy posłużyć się klasyczną metodą indukcji matematycznej.) A zatem ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jako rosnący i ograniczony z góry posiada granicę.

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- J. Banaś, S. Wędrychowicz, *Zbiór zadań z analizy matematycznej*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1993.
- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom 1*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985.
- W. Krywicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach, część 1*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
- J. Sikorska, *Zbiór zadań z matematyki dla studentów chemii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice, 2013.
- B. Tomasz, *Ciągi liczbowe – zadania*, Materiały z ćwiczeń z podstawy matematyki oraz wstępu do matematyki.