

TEORIA MOCY

TEORIA

RÓWNOLICZNOŚĆ ZBIORÓW. dwa zbiory X i Y są *równoliczne* (co zapisujemy $X \sim Y$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $f: X \rightarrow Y$ odwzorowująca wzajemnie jednoznacznie zbiór X na Y . Można np. pokazać, że odcinek $(0, 1)$ jest równoliczny z kwadratem bez brzegu o boku długości 1.

TWIERDZENIE CANTORA–BERNSTEINA. Jeżeli zbiór A jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru B , a zbiór B jest równoliczny z pewnym podzbiorem zbioru A , to zbiory A i B są równoliczne. W szczególności, jeżeli $C \subseteq B \subseteq A$ oraz $A \sim C$, to również $B \sim A$ oraz $B \sim C$.

ZBIORY SKOŃCZONE I NIESKOŃCZONE. Zbiór X jest *nieskończony*, gdy jest on równoliczny z pewnym swoim podzbiorem właściwym A (właściwym tzn. takim, że $A \subseteq X$, ale $A \neq X$). Mówimy, że zbiór X jest *skończony*, gdy nie jest on nieskończony.

Najprostszymi przykładami zbiorów nieskończonych są zbiory liczbowe: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ czy $\mathbb{R}$. Przykładami zbiorów skończonych są $\mathbb{Z}_n$ dla $n \geq 2$. Zbiór pusty jest również zbiorem skończonym.

ZBIÓR PRZELICZALNY. Zbiór X nazywamy *przeliczalnym*, gdy X jest skończony lub równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Okazuje się, że niepusty zbiór jest przeliczalny, gdy wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg (skończony lub nieskończony). Co więcej suma mnogościowa przeliczalnej liczby zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

ZBIORY MOCY $\aleph_0$. Wśród zbiorów przeliczalnych specjalne miejsce zajmują zbiory nieskończone. Są one równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych. Ich moc (liczebność) oznacza się symbolem $\aleph_0$ (czytaj: alef zero). Z samej definicji zbiór $\mathbb{N}$ ma moc $\aleph_0$. Jak zobaczymy w zadaniach moc $\aleph_0$ mają również zbiory $\mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{Q}$.

ZBIÓR POTĘGOWY. Niech X będzie dowolnym zbiorem. *Zbiorem potęgowym* zbioru X nazywamy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X i oznaczamy go symbolem $P(X)$ lub 2^X . (Pochodzenia drugiego z powyższych symboli można doszukiwać się w fakcie, że zbiór n -elementowy ma dokładnie 2^n podzbiorów.)

ZBIORY MOCY c . Zbiór równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nazywamy zbiorem mocy *kontinuum*. Skrótowo możemy napisać, że zbiór taki ma moc c . W teorii mocy dowodzi się, że $P(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, a zatem zbiór $P(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych ma moc

kontinuum. W konsekwencji $\aleph_0 < \mathfrak{c}$, co oznacza, że zbiór liczb rzeczywistych ma „znacznie więcej” elementów niż zbiór liczb naturalnych (a zatem i wymiernych).

ZADANIA

Zadanie 14.1. Pokaż, że jeżeli $A_1 \sim B_1$ oraz $A_2 \sim B_2$, to $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.

Zadanie 14.2. Pokaż, że jeżeli $A \sim B$, to $P(A) \sim P(B)$.

Zadanie 14.3. Niech X będzie ustalonym zbiorem. Rozważmy relację R na $P(X)$ określoną równoważnością $ARB \leftrightarrow A \sim B$. Pokaż, że relacja R jest relacją równoważności na $P(X)$.

UWAGA: Ustalenie zbioru X na początku zadania jest niezmiennie istotne i wynika z samych podstaw matematyki. Gdybyśmy chcieli, by relacja R była określona dla dowolnej pary zbiorów A i B (niekoniecznie będących podzbiorami ustalonego zbioru X), musielibyśmy rozważać ją na tzw. zbiorze *wszystkich zbiorów*. Wprowadzenie takiego obiektu do matematyki prowadzi do tzw. *antynomii (paradoксу) Russella* lub *paradoксу Cantora*. Anegdotycznie antynomię Russella można wyrazić następująco: *Fryzjer, mieszkaniec pewnego miasta, goli tych jego mieszkańców, którzy sami się nie golą. Czy ów fryzjer goli się sam? Jeżeli goli się on sam, to nie może golić się sam. Jeżeli natomiast jest mężczyzną, który nie goli się sami, to musi się sam golić!*

Zadanie 14.4. Sprawdź, czy podane zbiory A i B są równoliczne, jeżeli

- (a) $A = \{2, 3\}$ oraz $B = \{\text{Jan Kowalski, Zofia Nowak}\}$,
- (b) $A = \{n \in \mathbb{N} : n < 8\}$ oraz $B = \{n \in \mathbb{N} : 1 < n^2 < 64\}$,
- (c) $A = \mathbb{N}$ oraz $B = \mathbb{Z}$,
- (d) $A = (0, +\infty)$ oraz $B = \mathbb{R}$,
- (e) $A = \mathbb{N}$ oraz $B = (0, 1)$,
- (f) $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oraz $B = \mathbb{N}$,
- (g) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ oraz $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$,
- (h) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ oraz $B = \{(n, k) \in \mathbb{N}^2 : n^2 + k^2 \leq 2\}$,
- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ oraz $B = [0, 2\pi)$.

Zadanie 14.5. Pokaż, że jeżeli A jest zbiorem przeliczalnym oraz $B \subseteq A$, to B jest również zbiorem przeliczalnym

Zadanie 14.6. Uzasadnij, że poniższe zbiory są przeliczalne:

- (a) zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$,
- (b) zbiór przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$ o końcach wymiernych,
- (c) dowolny zbiór rozłącznych przedziałów w $\mathbb{R}$ o niepustych wnętrzach; przedział $I \subseteq \mathbb{R}$ (dowolnego typu) na niepuste wnętrze, jeżeli istnieje przedział otwarty $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $(a, b) \subseteq I$,

- (d) zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych,
- (e) zbiór wszystkich nieskończonych ciągów geometrycznych o wyrazach wymiernych i wyrazie początkowym a_1 różnym od zera; ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy *ciągami geometrycznymi*, jeżeli istnieje $q \in \mathbb{R}$ takie, że $a_{n+1} = a_n q$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
- (f) $\{A \subseteq \mathbb{N} : \text{zbiór } \mathbb{N} \setminus A \text{ jest zbiorem skończonym}\}$,
- (g) $\{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\}$.

Zadanie 14.7. Wykaż, że dowolny przedział w $\mathbb{R}$ o niepustym wnętrzu jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych.

Zadanie 14.8. Uzasadnij, że poniższe zbiory mają moc kontinuum:

- (a) płaszczyzna,
- (b) zbiór wszystkich punktów płaszczyzny o dokładnie jednej współrzędnej wymiernej,
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieje takie } q \in \mathbb{Q}, \text{ że } x - y = q\}$,
- (d) zbiór wszystkich suriekcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,
- (e) $\{A \subseteq \mathbb{N} : A \sim \mathbb{N} \setminus A\}$.

ROZWIĄZANIA

14.1 Zbiory A_1 i B_1 oraz A_2 i B_2 są równoliczne, a więc z definicji istnieją bijekcje $f_1: A_1 \rightarrow B_1$ oraz $f_2: A_2 \rightarrow B_2$. Pokażemy, że funkcja $F: A_1 \times A_2 \rightarrow B_1 \times B_2$ dana wzorem $F(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2))$ wyznacza równoliczność zbiorów $A_1 \times A_2$ oraz $B_1 \times B_2$. Niech (a_1, a_2) oraz (c_1, c_2) będą dowolnymi punktami w $A_1 \times A_2$ takimi, że $F(a_1, a_2) = F(c_1, c_2)$. Wtedy $(f_1(a_1), f_2(a_2)) = (f_1(c_1), f_2(c_2))$, a zatem $f_1(a_1) = f_1(c_1)$ oraz $f_2(a_2) = f_2(c_2)$. Ponieważ funkcje f_1, f_2 są iniekcjami, otrzymujemy $a_1 = c_1$ oraz $a_2 = c_2$. Dowodzi to, że $(a_1, a_2) = (c_1, c_2)$. Tym samym funkcja F jest iniekcją. By wykazać, że F jest suriekcją, rozważmy dowolny punkt $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$. Wtedy wobec suriektywności funkcji f_1, f_2 istnieją punkty $a_1 \in A_1$ oraz $a_2 \in A_2$ takie, że $f_1(a_1) = b_1$ oraz $f_2(a_2) = b_2$. Stąd $F(a_1, a_2) = (f_1(a_1), f_2(a_2)) = (b_1, b_2)$. Zatem funkcja F jest suriekcją na $B_1 \times B_2$. Skoro funkcja F jest bijekcją zbioru $A_1 \times A_2$ na $B_1 \times B_2$, zbiory te są równoliczne.

14.2 Ponieważ zbiory A i B są równoliczne, więc istnieje bijekcja f przekształcająca zbiór A na zbiór B . Zdefiniujemy odwzorowanie $F: P(A) \rightarrow P(B)$ wzorem $F(X) = f(X)$ dla $X \in P(A)$, tzn. każdemu zbiorowi $X \subseteq A$ przyporządkowujemy jego obraz poprzez funkcję f , tj. $F(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq B$. Pokażemy teraz, że funkcja F jest iniekcją. Niech $X, Y \in P(A)$ będą takie, że $F(X) = F(Y)$, tzn. $f(X) = f(Y)$. Zatem dla każdego $x \in X$ istnieje taki $y \in Y$, że $f(x) = f(y)$. W konsekwencji $x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = y \in Y$. Oznacza to, że $X \subseteq Y$. Podobnie można pokazać, że $Y \subseteq X$. Stąd $X = Y$. Funkcja F jest zatem iniekcją. Pokażemy teraz, że jest ona również suriekcją. Dla dowolnego $Y \in P(B)$ niech $X = f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\} \subseteq A$, tzn. zbiór X jest przeciwobrazem zbioru Y poprzez funkcję f . (UWAGA: symbol $f^{-1}(Y)$ możemy zrozumieć dwojako: jako przeciwobraz poprzez funkcję f lub jako obraz poprzez funkcję odwrotną f^{-1} . Okazuje się, że w przypadku bijekcji jest to dokładnie ten sam obiekt, używanie tutaj tego samego oznaczenia w dwóch różnych kontekstach nie prowadzi więc do błędów czy nieporozumień.) Wtedy $F(X) = f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Istotnie, jeżeli $y \in f(f^{-1}(Y))$, to $y = f(x)$ dla pewnego $x \in f^{-1}(Y)$. Ale z definicji przeciwobrazu $f^{-1}(Y)$ oznacza to, że $f(x) \in Y$, czyli $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$. Załóżmy teraz, że $y \in Y$. Ponieważ funkcja f jest bijekcją możemy napisać $y = f(f^{-1}(y))$. Zauważmy, że element $f^{-1}(y) \in X$. Wynika stąd, że $y \in f(X) = f(f^{-1}(Y))$. A zatem $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$. Pokazaliśmy więc, że dla ustalonego $Y \in P(B)$ istnieje $X \in P(A)$ taki, że $F(X) = Y$. Odwzorowanie F jest więc suriekcją. W konsekwencji jest również bijekcją i zbiory $P(A)$ i $P(B)$ są równoliczne.

- 14.3 ZWROTNOŚĆ:** Niech A będzie dowolnym zbiorem w $P(X)$. Wtedy funkcja identycznościowa $f: A \rightarrow A$ dana wzorem $f(a) = a$ dla każdego $a \in A$ jest bijekcją zbioru A na siebie. Oznacza to, że $A \sim A$, czyli ARA .

SYMETRYCZNOŚĆ: Niech $A, B \in P(X)$ będą dowolnymi zbiorami takimi, że ARB , tzn. $A \sim B$. Istnieje wtedy bijekcja $f: A \rightarrow B$ przekształcająca wzajemnie jednoznacznie zbiór A na zbiór B . Rozważmy funkcję odwrotną $f^{-1}: B \rightarrow A$. Pokażemy, że ona jest również bijekcją. Przypuśćmy, że dla dowolnych $b_1, b_2 \in B$ mamy $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$. Wtedy $b_1 = f(f^{-1}(b_1)) = f(f^{-1}(b_2)) = b_2$. Oznacza to, że f^{-1} jest iniekcją. By pokazać, że jest suriekcją, rozważmy dowolny element $a \in A$. Zdefiniujmy $b := f(a)$. Oczywiście $b \in B$, a ponadto $f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a)) = a$. Tym samym f^{-1} jest suriekcją i w konsekwencji bijekcją.

PRZECHODNIOŚĆ: Niech $A, B, C \in P(X)$ będą dowolnymi zbiorami takimi, że ARB oraz BRC , tzn. $A \sim B$ oraz $B \sim C$. Istnieją wtedy bijekcje $f: A \rightarrow B$ oraz $g: B \rightarrow C$ przekształcające wzajemnie jednoznacznie zbiór A na B i B na C . Rozważmy funkcję $h: A \rightarrow C$ daną wzorem $h(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$. Pokażemy, że jest ona szukaną bijekcją zbioru A na C . Niech $a_1, a_2 \in A$ będą dowolnymi punktami takimi, że $h(a_1) = h(a_2)$, tzn. $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Korzystając z iniektywności funkcji g , otrzymujemy $f(a_1) = f(a_2)$. Teraz kolej na iniektywność funkcji f . W konsekwencji dostajemy $a_1 = a_2$, co oznacza, że h jest iniekcją. By pokazać, że h jest suriekcją na C weźmy dowolny punkt $c \in C$ i zdefiniujmy $a := f^{-1}(g^{-1}(c))$. (Tutaj symbole f^{-1} i g^{-1} oznaczają funkcje odwrotne do f i g odpowiednio. Są one poprawnie zdefiniowane, bowiem f i g są bijekcjami.) Wtedy $g^{-1}(c) \in B$ i $f^{-1}(g^{-1}(c)) \in A$ oraz $h(a) = g(f(a)) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(c)))) = g(g^{-1}(c)) = c$. Zatem h jest suriekcją na C . Skoro h odwzorowuje bijektywnie A na C , dostajemy $A \sim C$, tzn. ARC .

- 14.4** (a) Określmy funkcję $f: A \rightarrow B$ następującymi przyporządkowaniami $2 \mapsto \text{Jan Kowalski}$ oraz $3 \mapsto \text{Zofia Nowak}$. Tak zdefiniowane odwzorowanie przekształca bijektywnie zbiór A na zbiór B . Pokazuje to, że $A \sim B$.
- (b) Zauważmy, że $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ oraz $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Pokażemy, że zbiory nie mogą być równoliczne. Rozważmy dowolną funkcję $f: A \rightarrow B$. Wtedy na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieje wartość $b \in B$ oraz co najmniej dwa argumenty $a_1, a_2 \in A$ takie, że $f(a_1) = b$ oraz $f(a_2) = b$. Oznacza to, że każda funkcja przekształcająca zbiór A w B nie jest iniektywna. Nie może być więc bijekcją.
- (c) Niech $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ będzie dana wzorem:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}(n-2) & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ -\frac{1}{2}(n+1) & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Zacniemy od sprawdzenia, że funkcja f jest różnowartościowa. Przypuśćmy, że dla dowolnie wybranych $n, m \in \mathbb{N}$ mamy $f(n) = f(m)$. Zauważmy, iż nie może się zdarzyć, że liczby m i n są różnej parzystości, ponieważ w takim przypadku liczby $f(n)$ i $f(m)$ byłyby

różnych znaków i w konsekwencji równość $f(n) = f(m)$ nie mogłaby zachodzić. Jeżeli n, m są liczbami parzystymi, to z równości $f(n) = f(m)$ wynika, że $\frac{1}{2}(n-2) = \frac{1}{2}(m-2)$, a zatem $n = m$. Jeżeli natomiast n, m są liczbami nieparzystymi, to równość $f(n) = f(m)$ implikuje, że $-\frac{1}{2}(n+1) = -\frac{1}{2}(m+1)$, skąd również otrzymujemy, że $n = m$. Tym samym pokazaliśmy, że odwzorowanie f jest iniekcją. W celu wykazania, że f jest suriekcją rozważmy dowolną liczbę całkowitą $k \in \mathbb{Z}$ oraz przyjmijmy $n := 2k + 2$, jeżeli $k \geq 0$, oraz $n := -(2k + 1)$, jeżeli $k < 0$. Wtedy, w każdym z dwóch powyższych przypadków, mamy $n \in \mathbb{N}$ i

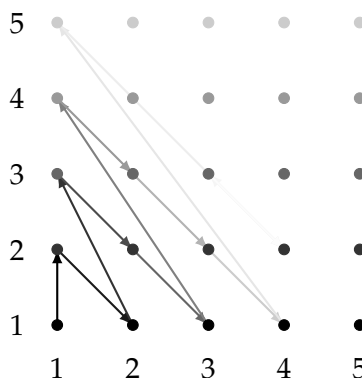
$$f(n) = f(2k + 2) = \frac{1}{2}[(2k + 2) - 2] = k$$

dla $k \geq 0$ oraz

$$f(n) = f(-2k - 1) = -\frac{1}{2}[-(2k + 1) + 1] = k$$

dla $k < 0$. To pokazuje, że funkcja f jest suriekcją zbioru $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$. Tym samym $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

- (d) Rozważmy funkcję $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem $f(x) = \ln x$ dla $x \in (0, +\infty)$. Można łatwo sprawdzić, że funkcja f przekształca wzajemnie jednoznacznie zbiór $(0, +\infty)$ na $\mathbb{R}$; funkcją odwrotną do $f(x) = \ln x$ jest funkcja $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ dana wzorem $f^{-1}(x) = e^x$. Wynika stąd, że $(0, +\infty) \sim \mathbb{R}$.
- (e) Pokażemy, że przedział $(0, 1)$ nie jest przeliczalny, co będzie oznaczać, że nie może być równoliczny z $\mathbb{N}$. Po pierwsze zauważmy, że zbiór $(0, 1)$ jest nieskończony, bo jest równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym $(0, \frac{1}{2})$; wystarczy rozważyć funkcję $f: (0, 1) \rightarrow (0, \frac{1}{2})$ daną wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x$, by to zobaczyć. Przypuśćmy teraz, że przedział $(0, 1)$ jest jednak przeliczalny, tzn. wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg nieskończony $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Można pokazać (nie będziemy tego robić), że każda liczba z przedziału $(0, 1)$ ma dokładnie jedno nieskończone rozwinięcie dziesiętne. Oznacza to, że $x_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots$, gdzie $a_{ni} \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, ale nie wszystkie z nich są od pewnego miejsca zerami; wtedy rozwinięcie byłoby skończone. Określmy teraz nową liczbę $x := 0, b_1b_2b_3b_4 \dots$, przyjmując, że $b_i \neq a_{ii}$, $b_i \neq 0$ oraz $b_i \neq 9$ dla $i \in \mathbb{N}$. Wtedy x jest liczbą z przedziału $(0, 1)$, a ponadto $x \neq x_i$, bo liczby x i x_i mają różne cyfry na i -tym miejscu rozwinięcia dziesiętnego, tzn. $b_i \neq a_{ii}$. Zatem x jest liczbą z przedziału $(0, 1)$ różną od wszystkich liczb ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. To jest jednak sprzeczne z założeniem, że ciąg ten zawierał wszystkie liczby z przedziału $(0, 1)$. Oznacza to, że zbiory $\mathbb{N}$ oraz $(0, 1)$ nie są równoliczne.
- (f) Rozważmy odwzorowanie $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ zdefiniowane jak na poniższym rysunku.



Gdybyśmy chcieli zadać funkcję f wzorem, wyglądałby on następująco

$$f(i, j) = \frac{1}{2}(i + j - 2)(i + j - 1) + i \quad \text{dla } (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Z samej konstrukcji funkcji f widać, że przekształca ona bijektywnie zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$.
Zatem $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

- (g) Zbiory A i B są równoliczne, bowiem można łatwo sprawdzić, że funkcja $f: A \rightarrow B$ zdefiniowana wzorem $f(x, y) = (2x, 2y)$ jest bijekcją.
- (h) Zauważmy, że zbiór B zawiera jedynie cztery elementy: $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$, podczas gdy zbiór A jest zbiorem nieskończonym. W szczególności zawiera on pięć różnych elementów. Rozumowanie analogiczne do tego, które można znaleźć w podpunkcie (b) pokazuje, że nie istnieje bijekcja zbioru A na zbiór B , tzn. zbiory A i B nie są równoliczne.
- (i) Pokażemy, że funkcja $f: B \rightarrow A$ zdefiniowana wzorem $f(t) = (\cos t, \sin t)$ wyznacza równoliczność zbiorów A i B . Na wstępie zauważmy, że ze wzoru jedynkowego wynika, że f jest dobrze zdefiniowana, tzn. $f(t) \in A$ dla każdego $t \in B$. Pokażemy teraz, że f jest iniekcją. Przypuśćmy, że $f(t) = f(s)$ dla $t, s \in B$. Wtedy $\cos t = \cos s$ oraz $\sin t = \sin s$, a zatem $\cos(t - s) = \cos t \cos s + \sin t \sin s = 1$. Tym samym $t - s = 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Z drugiej strony $t, s \in [0, 2\pi)$, więc $t = s$. By wykazać, że zbiory A i B są równoliczne, pozostaje zatem udowodnić, że funkcja f jest suriekcją. Ustalmy punktu $(x, y) \in A$. Wiemy, że istnieje wtedy dokładnie jeden kąt $t \in [0, 2\pi)$ taki, że $\cos t = x$ oraz $\sin t = y$ (por. Rozdział 13). Tym samym $f(t) = (\cos t, \sin t) = (x, y)$, co pokazuje, że f jest suriekcją. Zatem $A \sim B$.

14.5 W przypadku, gdy A jest zbiorem skończonym, to zawieranie $B \subseteq A$ implikuje, że również B jest zbiorem skończonym. Istotnie, gdyby B był nieskończony, to istniałby jego podzbiór właściwy C równoliczny z całym zbiorem B . Istniałaby zatem bijekcja f przekształcająca zbiór B na C . Definiując $g: A \rightarrow C$ wzorem $g(x) = x$ dla $x \in A \setminus B$ oraz $g(x) = f(x)$ dla $x \in B$, otrzymalibyśmy bijekcję A na właściwy podzbiór zbioru A postaci $(A \setminus B) \cup C$. Zbiór A nie byłby więc skończony – sprzeczność. Możemy więc założyć, że zbiór A jest równoliczny z $\mathbb{N}$. Przez F oznaczmy bijekcję przekształcającą zbiór A na $\mathbb{N}$, która istnieje na mocy założenia. Jeżeli B jest zbiorem skończonym (zbiór B może być również zbiorem pustym), to wprost z definicji jest on zbiorem przeliczalnym. Możemy więc bez straty ogólności przyjąć, że zbiór B jest nieskończony. Wtedy również zbiór $F(B)$ jest zbiorem nieskończonym, bowiem jeżeli $G: B \rightarrow D$ jest bijekcją zbioru B na pewien jego podzbiór właściwy D , to $F \circ G \circ F^{-1}: F(B) \rightarrow F(D)$ jest bijekcją $F(B)$ na $F(D)$. Ponieważ zbiór $F(B)$ jest równoliczny ze zbiorem B , w celu wykazania, że $B \sim \mathbb{N}$, wystarczy udowodnić, że zbiór $F(B)$ jest przeliczalny. Skoro $F(B) \neq \emptyset$, możemy w zbiorze $F(B)$ znaleźć element najmniejszy; który oznaczmy przez a_1 , tj. $a_1 = \min \{n \in \mathbb{N} : n \in F(B)\}$. (UWAGA: wykorzystujemy tutaj fakt, że zbiór liczb naturalnych ze standardowym porządkiem generowanym przez relację nierówności $\leq$ jest tzw. *zbiorem dobrze uporządkowanym*, tzn. takim zbiorem, w którym każdy niepusty podzbiór ma element najmniejszy względem relacji porządku.) Ponieważ zbiór $F(B)$ jest nieskończony, to $F(B) \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, a zatem zbiór $F(B) \setminus \{a_1\}$ posiada element najmniejszy a_2 . Zauważmy, że $a_1 < a_2$. Gdyby bowiem $a_2 \leq a_1$, to z minimalności elementu a_1 wynikałoby, że $a_1 = a_2$, a to prowadziło do wniosku, że $a_1 \in F(B) \setminus \{a_1\}$, co oczywiście nie jest prawdą. Ogólnie, mając już zdefiniowane n pierwszych elementów ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n$, wyraz a_{n+1} definiujemy jako element najmniejszy zbioru $F(B) \setminus \{a_1, \dots, a_n\} \neq \emptyset$. Oczywiście $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1}$. Z konstrukcji wynika, iż przekształcenie $H: \mathbb{N} \rightarrow F(B)$ zdefiniowane wzorem $H(n) = a_n$ jest różnowartościowe. Zauważmy jednak, że jest ono również suriekcją, ponieważ dla dowolnego $k \in F(B)$ zbiór $\{n \in F(B) : n \leq k\} \subseteq \mathbb{N}$ jest skończony, a zatem jeżeli liczy on l elementów, to $k = a_l$. Tym samym odwzorowanie H jest bijekcją, która wyznacza równoliczności zbiorów $F(B)$ oraz $\mathbb{N}$. Stąd $B \sim \mathbb{N}$.

- 14.6 (a) W pierwszym kroku wypiszmy wszystkie liczby wymierne dodatnie w postaci następującej tablicy

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \dots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \dots \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \dots \\ \frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \dots \end{array}$$

Ustawmy teraz te liczby w ciąg, pisząc najpierw te, w których suma licznika i mianownika wynosi 2, potem te, w których suma licznika i mianownika wynosi 3, itd. Otrzymujemy

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Usuńmy teraz z tego ciągu wszystkie wyrazy, które występują już w nim poprzednio. Dostajemy więc ciąg zawierający wszystkie liczby wymierne, przy czym każdą z nich tylko raz:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \dots$$

Pozostaje jeszcze uwzględnić liczby wymierne ujemne oraz zero. Widzimy więc, że wszystkie liczby wymierne można ustawić w ciąg różnowartościowy:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{1}, -\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{1}, -\frac{5}{1}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots$$

Oznacza to, że zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny.

- (b) Niech A oznacza zbiór składający się z przedziałów otwartych w $\mathbb{R}$ o końcach wymiernych, tj.

$$A = \{(a, b) \subseteq \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q} \text{ i } a < b\}.$$

Rozważmy funkcję $f: A \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, która każdemu przedziałowi (a, b) przyporządkowuje parę (a, b) złożoną z końców tego przedziału: lewego i prawego. Niestety w naszej notacji te dwa obiekty oznaczane są takim samym symbolem. By zatem uniknąć niejasności, w tym zadaniu będziemy oznaczać przedział otwarty o końcach a i b symbolem $]a, b[$. Możemy zatem zapisać $f(]a, b[) = (a, b)$ dla $]a, b[\in A$. Odwzorowanie f jest iniekcją. Gdyby bowiem zdarzyło się, że $f(]a, b[) = f(]c, d[)$ dla $]a, b[,]c, d[\in A$, to $(a, b) = (c, d)$, skąd wynika, że $a = c$ oraz $b = d$. Zatem $]a, b[=]c, d[$. W konsekwencji $A \sim f(A)$. Wiemy ponadto, że $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ (por. Zadanie 14.1, Zadanie 14.4 (f) oraz Zadanie 14.6 (a)), a zatem istnieje bijekcja $g: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$. Złożenie $g \circ f$ jest odwzorowaniem różnowartościowym przekształcającym zbiór A w $\mathbb{N}$, co wobec Zadania 14.5, pokazuje, że zbiór A jest zbiorem przeliczalnym.

- (c) Niech A oznacza dowolny zbiór rozłącznych przedziałów w $\mathbb{R}$ o niepustych wnętrzach. Zdefiniujmy odwzorowanie f przekształcające zbiór A w $\mathbb{Q}$, które każdemu przedziałowi $I \in A$ przyporządkowuje wybraną liczbę wymierną $q_I \in I \cap \mathbb{Q}$. Zauważmy, że liczba q_I istnieje z uwagi na niepustość wnętrza przedziału I oraz gęstość liczb wymiernych w $\mathbb{R}$. Odwzorowanie f jest odwzorowaniem różnowartościowym, bowiem z faktu, iż przedziały $I, J \in A$ są rozłączne wynika, iż liczby q_I oraz q_J są różne. Składając funkcję f z bijekcją g , która przekształca zbiór $\mathbb{Q}$ na zbiór $\mathbb{N}$, otrzymujemy odwzorowanie $g \circ f: A \rightarrow \mathbb{N}$

przekształcające różnowartościowo zbiór A w zbiór $\mathbb{N}$. Tym samym zbiór A jest zbiorem przeliczalnym (por. Zadanie 14.5).

- (d) Oznaczmy przez W zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych, a przez W_n jego podzbiór, składający się z wielomianów stopnia n . Zauważmy, że każdy wielomian

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

stopnia n możemy utożsamiać z $(n+1)$ -elementowym ciągiem współczynników

$$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0).$$

Innymi słowy odwzorowanie

$$f_n: W_n \rightarrow \mathbb{Z} \times \binom{n+1}{\dots} \times \mathbb{Z}$$

dane wzorem

$$f(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$$

jest iniekcją. Stąd $W_n \sim f(W_n)$. Ale $f(W_n)$ jest podzbiorem zbioru przeliczalnego $\mathbb{Z} \times \binom{n+1}{\dots} \times \mathbb{Z}$ (przeliczalność tego zbioru wynika z Zadania 14.1 oraz Zadania 14.4 (c) i (f)). Stąd na mocy Zadania 14.5 zbiór W_n jest przeliczalny. Zauważmy teraz, że

$$W = \{0\} \cup W_0 \cup W_1 \cup W_2 \cup \dots,$$

tzn. W jest przeliczalną sumą mnogościową zbiorów przeliczalnych. A zatem zbiór W wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych jest również przeliczalny.

- (e) Przez A oznaczmy zbiór składający się ze wszystkich nieskończonych ciągów geometrycznych o wyrazach wymiernych. Rozważmy odwzorowanie $f: A \rightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ zdefiniowane wzorem $f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_1, \frac{a_2}{a_1})$ dla $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$. Zauważmy, że funkcja f jest poprawnie zdefiniowana, tzn. dla każdego $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ mamy $a_1 \in \mathbb{Q}$ oraz $\frac{a_2}{a_1} \in \mathbb{Q}$ (założenie $a_1 \neq 0$ implikuje, że iloraz $q_a = \frac{a_2}{a_1}$ jest określony). Pokażemy teraz, że funkcja f jest iniekcją. Przypuśćmy, że $f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = f((b_n)_{n \in \mathbb{N}})$ dla $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$. Wtedy $(a_1, \frac{a_2}{a_1}) = (b_1, \frac{b_2}{b_1})$, a zatem $a_1 = b_1$ oraz $a_2 = b_2$. W szczególności $q_a = q_b$ i w konsekwencji $a_n = b_n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Tym samym ciągi $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ są równe. Rozumując podobnie jak w poprzednim podpunkcie widzimy, że $A \sim f(A)$ oraz $f(A)$ jest podzbiorem zbioru przeliczalnego $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Zatem A jest zbiorem przeliczalnym.

- (f) Rozważmy następujące zbiory $A_0 = \{\mathbb{N}\}$ oraz

$$A_i = \{X \subseteq \mathbb{N} : \text{zbiór } \mathbb{N} \setminus X \text{ ma dokładnie } i \text{ elementów}\}$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots$. Oczywiście $A_0 \sim \{1\}$. Pokażemy teraz, że A_i są zbiorami przeliczalnymi dla $i = 1, 2, 3, \dots$. Dla ustalonego zbioru $X \in A_i$ przez $x_1 < x_2 < \dots < x_i$ oznaczmy elementy należące do zbioru $\mathbb{N} \setminus X$. Możemy więc określić przyporządkowanie

$$f_i: A_i \rightarrow \mathbb{N} \times \binom{i}{\dots} \times \mathbb{N}$$

wzorem

$$X \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_i).$$

Odwzorowanie to jest różnowartościowe, ponieważ jeżeli $f_i(X) = f_i(Y)$ dla $X, Y \in A_i$, to

$$(x_1, x_2, \dots, x_i) = (y_1, y_2, \dots, y_i).$$

Stąd $x_j = y_j$ dla $j = 1, 2, \dots, i$ oraz

$$\mathbb{N} \setminus X = \{x_1, x_2, \dots, x_i\} = \{y_1, y_2, \dots, y_i\} = \mathbb{N} \setminus Y,$$

a zatem

$$X = \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus X) = \mathbb{N} \setminus (\mathbb{N} \setminus Y) = Y.$$

Tym samym zbiór A_i jest przeliczalny (por. rozwiązania poprzednich podpunktów). Przeliczalność zbioru A wynika teraz z przeliczalności zbiorów A_i oraz faktu, że $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots$

- (g) Zauważmy, że zbiór $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin x \in \mathbb{Q}\}$ można zapisać jako przeliczalną sumę zbiorów przeliczalnych. Istotnie $A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q$, gdzie $A_q = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = q\}$ dla $q \in \mathbb{Q}$. Zbiory A_q są oczywiście przeliczalne, bowiem na każdym przedziale $[2k\pi, 2(k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, funkcja $\sin x$ przecina prostą $y = q$ w maksymalnie dwóch punktach, a rodzina przedziałów powyższego typu jest przeliczalna (zob. Zadanie 14.6 (b)). Tym samym zbiór A jako przeliczalna suma mnogościowa zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym.

- 14.7** Przypomnijmy, że przedział ma niepuste wnętrze, jeśli zawiera pewien przedział otwarty. Na przykład przedział $[0, 3)$ ma niepuste wnętrze, ponieważ $(1, 2) \subseteq [0, 3)$. Natomiast wnętrze przedziału $[0, 0]$ jest puste. Równoważnie możemy powiedzieć, że przedział ma niepuste wnętrze, gdy zawiera co najmniej dwa punkty.

KROK 1. Zauważmy, iż dowolne dwa przedziały otwarte (a, b) oraz (c, d) , gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$ i $c < d$, są równoliczne. Istotnie funkcja $f: (a, b) \rightarrow (c, d)$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c \quad \text{dla } x \in (a, b)$$

jest bijekcją (jako funkcja liniowa).

KROK 2. Ponieważ funkcja

$$g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

zdefiniowana wzorem $g(x) = \tan x$ jest bijekcją, więc $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$. Stąd, na mocy Kroku 1, mamy $(a, b) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$ dla dowolnego przedziału $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$.

KROK 3. Jeżeli $(a, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem nieograniczonym, gdzie $a \in \mathbb{R}$, to z faktu, że $(a, a+1) \subseteq (a, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, Kroku 1 oraz twierdzenia Cantora–Bernsteina wynika, że $(a, +\infty) \sim \mathbb{R}$. Podobnie można pokazać, że $(-\infty, a) \sim \mathbb{R}$.

KROK 4: Jeżeli I jest przedziałem jednostronnie lub obustronnie domkniętym, to z faktu, iż ma on niepuste wnętrze wynika, że istnieje przedział otwarty $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ taki, że $(a, b) \subseteq I \subseteq \mathbb{R}$. Na mocy twierdzenia Cantora–Bernsteina otrzymujemy, że $I \sim \mathbb{R}$.

KROK 5: Jeżeli I jest przedziałem postaci $[a, +\infty)$ lub $(-\infty, a]$, to rozumując podobnie jak w Kroku 3 można pokazać, że $I \sim \mathbb{R}$.

- 14.8** (a) Z poprzedniego zadania oraz Zadania 14.1 wiemy, że $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim (0, 1) \times (0, 1)$. A z drugiej strony $\mathbb{R} \sim (0, 1) \sim (0, 1) \times (0, 1)$. Oznacza to, że płaszczyzna $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ma moc kontinuum.
- (b) Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech A będzie zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny o dokładnie jednej współrzędnej wymiernej, zaś

$$B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{(q, \pi) \in \mathbb{R}^2 : q \in \mathbb{Q}\}.$$

Pokażemy teraz, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow B$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} (x, 0), & \text{jeżeli } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ (x, \pi), & \text{jeżeli } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

wyznacza równoliczność zbiorów B oraz $\mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $f(x) = f(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. Wtedy $x, y \in \mathbb{Q}$, bądź $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; nie jest możliwe, by $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = f(y)$. Jeżeli $x, y \in \mathbb{Q}$, to z równości $f(x) = f(y)$ wynika, że $(x, \pi) = (y, \pi)$ oraz $x = y$. Jeżeli natomiast $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to równość $f(x) = f(y)$ implikuje, że $(x, 0) = (y, 0)$, więc $x = y$. Oznacza to, że f jest iniekcją. Zauważmy ponadto, że funkcja f jest suriekcją na zbiór B . Istotnie, dla dowolnej pary $(a, b) \in B$ niech $x = a$. Wtedy w każdym z przypadków ($a \in \mathbb{Q}$ oraz $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) mamy $f(x) = (a, b)$, bowiem jeżeli $a \in \mathbb{Q}$, to $(a, b) = (a, \pi)$, natomiast jeżeli $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to $(a, b) = (a, 0)$. Tym samym funkcja f jest bijekcją i $B \sim \mathbb{R}$. Ponieważ $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$, na mocy twierdzenia Cantora–Bernsteina, stwierdzamy, że $A \sim \mathbb{R}$.

- (c) Niech A oznacza zbiór punktów $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dla których istnieje takie $q \in \mathbb{Q}$, że $x - y = q$. Ponadto niech $B = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$. Zauważmy, że $B \sim \mathbb{R}$; bijekcją odwzorowującą zbiór B na $\mathbb{R}$ jest funkcja $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = (x, x)$. Wtedy $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$, a zatem na mocy twierdzenia Cantora–Bernsteina oraz podpunktu (c), stwierdzamy, że $A \sim \mathbb{R}$.
- (d) Dla ustalonego zbioru $Y \subseteq \mathbb{N}$ określmy funkcję $f_Y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wzorem

$$f_Y(n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ \chi_Y(\frac{1}{2}(n-1)), & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Tutaj χ_Y oznaczamy funkcję charakterystyczną zbioru Y , tj. funkcję $\chi_Y: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ zdefiniowaną następująco

$$\chi_Y(m) = \begin{cases} 1, & \text{dla } m \in Y, \\ 0, & \text{dla } m \notin Y. \end{cases}$$

Zauważmy, że funkcja f_Y jest suriekcją z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$. Zdefiniujmy teraz następujące zbiory

$$A = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : f \text{ jest suriekcją}\} \quad \text{oraz} \quad B = \{f_Y \in A : Y \in P(\mathbb{N})\}.$$

Mamy $B \subseteq A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, gdzie symbolem $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oznaczyliśmy zbiór wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. (Pierwsze zawieranie w powyższym ciągu inkluzji wynika z faktu, że każda funkcja f_Y należąca do zbioru B jest suriekcją, drugie jest oczywiste, a trzecie łatwo zobaczyć, gdy zauważymy, iż wykres funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ jest podzbiorem $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.) Ponieważ $\mathbb{R} \sim P(\mathbb{N}) \sim P(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, aby wykazać, że A ma moc kontinuum, wystarczy udowodnić, że $B \sim \mathbb{R}$. I właśnie teraz przejdziemy do dowodu tego faktu.

Rozważmy odwzorowanie $F: P(\mathbb{N}) \rightarrow B$ zdefiniowane wzorem $F(Y) = f_Y$. Pokażemy, że jest ono iniekcją. Niech $Y, Z \subseteq \mathbb{N}$ będą dowolnymi zbiorami takimi, że $F(Y) = F(Z)$. Wtedy $f_Y(n) = f_Z(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. W szczególności, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\begin{aligned} \chi_Y(k) &= \chi_Y\left(\frac{1}{2}[(2k+1)-1]\right) = f_Y(2k+1) \\ &= f_Z(2k+1) = \chi_Z\left(\frac{1}{2}[(2k+1)-1]\right) = \chi_Z(k). \end{aligned}$$

A zatem $k \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $k \in Y$, co oznacza, że $X = Y$. Odwzorowanie F jest więc iniekcją. Suriektywność odwzorowania F wynika z definicji zbioru B , bowiem dowolna funkcja $f_X \in B$ „powstaje” ze zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$. Tym samym odwzorowanie F jest bijekcją i w konsekwencji $B \sim \mathbb{R}$.

(e) Niech

$$C = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \sim \mathbb{N} \setminus A\}$$

oraz niech rodzina B składa się ze wszystkich zbiorów postaci $X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\}$, gdzie X jest podzbiorem zbioru $\{3k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$. Pokażemy, że $B \subseteq C \subseteq P(\mathbb{N})$ oraz $B \sim \mathbb{R}$, skąd w oparciu o twierdzenie Canotra–Bernsteina wyniknie, że $C \sim \mathbb{R}$. Bierzmy się więc do pracy.

Zacznijmy od udowodnienia powyższej inkluzji. Zauważmy, że wystarczy wykazać, że $B \subseteq C$, gdyż zawieranie $C \subseteq P(\mathbb{N})$ wynika wprost z definicji zbioru C . Rozważmy dowolny zbiór postaci $X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\}$, gdzie $X \subseteq \{3k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$. Wtedy

$$\{3k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N},$$

co oznacza, że zbiór $X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\}$ jest przeliczalny. Ponadto

$$\{3k + 2 : k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \setminus (X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathbb{N}.$$

Tym samym również zbiór

$$\mathbb{N} \setminus (X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\})$$

jest przeliczalny. Stąd

$$X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\} \sim \mathbb{N} \setminus (X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\})$$

i w konsekwencji

$$X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\} \in C.$$

Oznacza to, że $B \subseteq C$.

Pozostaje nam teraz wykazać, że $B \sim \mathbb{R}$. W tym celu zauważmy, że odwzorowanie

$$F: P(\{3k + 1 : k \in \mathbb{N}\}) \rightarrow \mathcal{B}$$

dane wzorem $F(X) = X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\}$ jest bijekcją. Jeżeli bowiem $F(X) = F(Y)$ dla $X, Y \subseteq \{3k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$, to

$$X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\} = Y \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\},$$

ale drugiej strony

$$X \cap \{3k : k \in \mathbb{N}\} = Y \cap \{3k : k \in \mathbb{N}\} = \emptyset.$$

Tym samym $X = Y$. A zatem F jest odwzorowaniem różnowartościowym. Ponadto, dla dowolnego $Z \in \mathcal{B}$, tj. zbioru postaci $Z = X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\}$, gdzie $X \subseteq \{3k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$ niech $Y = X$. Wtedy

$$F(Y) = Y \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\} = X \cup \{3k : k \in \mathbb{N}\} = Z,$$

co dowodzi suriektywności odwzorowania F . To dowodzi ostatecznie, że $B \sim \mathbb{R}$.

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- *Antynomia Russella*, https://pl.wikipedia.org/wiki/Antynomia_Russella
- M. Borkowski, *Wstęp do teorii mnogości – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2006.

- M. Kaluba, *Wstęp do matematyki – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2012.
- W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1999.
- R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2005.
- J. Musielak, *Wstęp do matematyki*, PWN, Warszawa, 1970.
- *Paradoks fryzjera*, <http://www.math.edu.pl/paradoks-fryzjera>