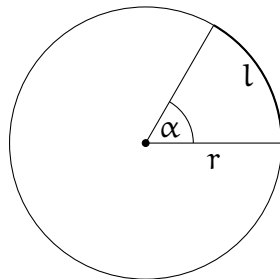


FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

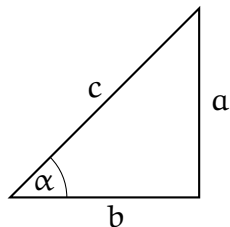
TEORIA

MIARA ŁUKOWA. Niech α będzie kątem środkowym okręgu, a więc takim kątem, którego wierzchołek pokrywa się ze środkiem okręgu a ramiona zawierają promienie okręgu. *Miara łukowa* kąta α to liczba równa stosunkowi długości łuku, na którym oparty jest ten kąt, do długości promienia okręgu. Jednostką miary łukowej kąta jest *radian*. W szczególności miara kąta pełnego to zarówno 360° jak i 2π radianów.



Miarą łukową kąta α jest $\frac{l}{r}$.

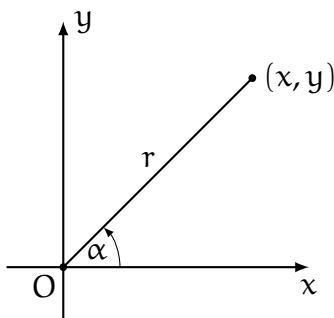
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE KĄTA OSTREGO α zdefiniowane są następującymi wzorami



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

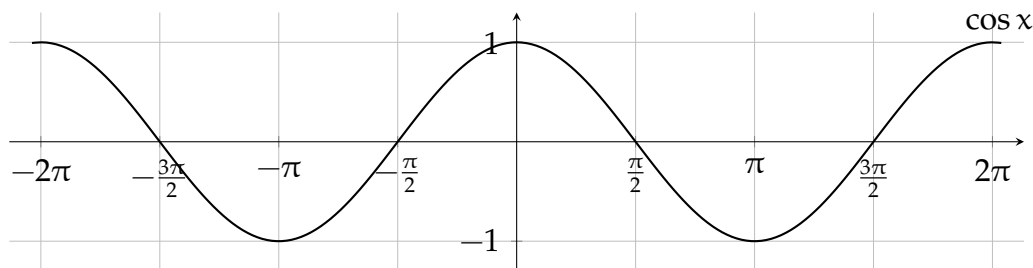
FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE DOWOLNEGO KĄTA. Niech α będzie kątem skierowanym o ramieniu początkowym pokrywającym się z osią OX i ramieniu końcowym leżącym na prostej przechodzącej przez punkty O oraz P. Jeżeli przez r oznaczymy odległość punktu P od początku układu współrzędnych O, tj. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, to funkcje trygonometryczne kąta α zdefiniowane są następującymi wzorami:



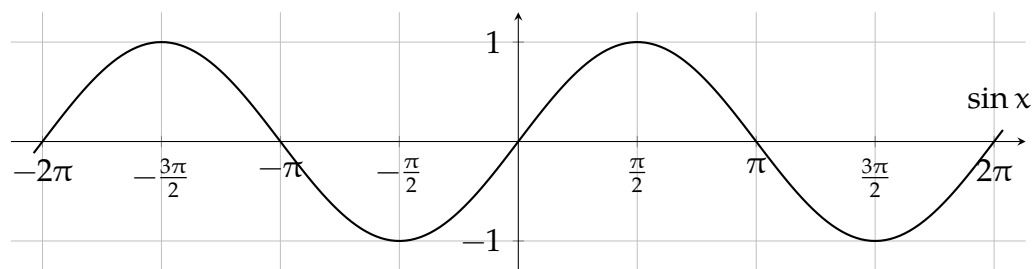
$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

KOSINUSOIDA. Wykres funkcji $f(x) = \cos x$ nazywa się *kosinusoidą*.



SINUSOIDA. Wykres funkcji $f(x) = \sin x$ nazywa się *sinusoidą*.



WAŻNA WŁASNOŚĆ PARY SINUS–KOSINUS. Okazuje się, że dla każdej pary liczb rzeczywistych a, b takich, że $a^2 + b^2 \neq 0$, istnieje (dokładnie jeden) kąt $\alpha \in [0, 360^\circ)$ taki, że

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{oraz} \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH. W poniższej tabeli zebrano wartości funkcji trygonometrycznych dla podstawowych kątów. Symbol „n.i.” oznacza, że dana wartość nie istnieje.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.i.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.i.
$\operatorname{ctg} \alpha$	n.i.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	n.i.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ZNAKI FUNKCJI TRYGNOMETRYCZNYCH. W poniższej tabeli zebrano „znaki” funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach. Symbol „+” oznacza, że funkcja trygonometryczna przyjmuje w danej ćwiartce wartość dodatnią, symbol „-” – wartość ujemną.

$\alpha \in$	$(0^\circ, 90^\circ)$	$(90^\circ, 180^\circ)$	$(180^\circ, 270^\circ)$	$(270^\circ, 360^\circ)$
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

W zapamiętaniu znaków funkcji trygonometrycznych może pomóc następujący „wierszyk:”

W pierwszej ćwiartce wszystkie funkcje są dodatnie,

W drugiej tylko sinus,

W trzeciej tangens i kotangens,

W czwartej kosinus.

WZORY REDUKCYJNE. Obliczając wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów innych niż kąty ostre można posługiwać się poniższymi wzorami redukcyjnymi.

β	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin \beta$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

TOŻSAMOŚCI TRYGNOMETRYCZNE. Poniżej zebrano podstawowe tożsamości trygonometryczne:

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$
- $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1,$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$

Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta:

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$
- $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$
- $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$

Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta,$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$

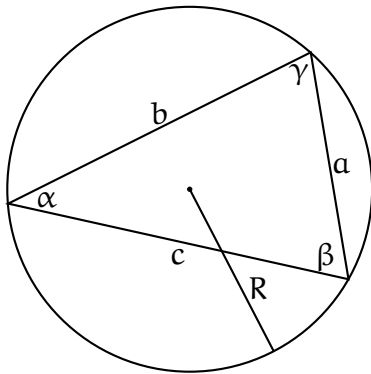
Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych:

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$

Z powyższych tożsamości otrzymujemy również:

- $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta),$
- $\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta),$
- $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$

TWIERDZENIE SINUSÓW. W dowolnym trójkącie stosunek długości dowolnego boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

TWIERDZENIE COSINUSÓW. W dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków, pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

ZADANIA

Zadanie 13.1. Zamień miarę stopniową na miarę łukową dla kątów:

- | | | |
|-----------------|------------------|------------------|
| (a) $30^\circ,$ | (c) $135^\circ,$ | (e) $330^\circ,$ |
| (b) $60^\circ,$ | (d) $225^\circ,$ | (f) $240^\circ.$ |

Zadanie 13.2. Zamień miarę łukową na miarę stopniową dla kątów:

- | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|
| (a) $\frac{2\pi}{3},$ | (c) $\frac{5\pi}{12},$ | (e) $\frac{8\pi}{15},$ |
| (b) $\frac{5\pi}{6},$ | (d) $\frac{7\pi}{9},$ | (f) $\frac{11\pi}{15}.$ |

Zadanie 13.3. Na podstawie definicji oblicz funkcje trygonometryczne kąta

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| (a) $30^\circ,$ | (b) $45^\circ,$ | (c) $60^\circ.$ |
|-----------------|-----------------|-----------------|

Zadanie 13.4. Oblicz $\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 88^\circ \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ.$

Zadanie 13.5. W kwadracie, którego bok ma długość 1 zawarty jest trójkąt. Pokazać, że pole trójkąta nie jest większe niż sinus dowolnego jego kąta.

Zadanie 13.6. Punkt Q powstaje w wyniku obrotu punktu $P(1,0)$ wokół początku układu współrzędnych o kąt α . Znajdź współrzędne punktu Q, jeżeli

- (a) $\alpha = 120^\circ$, (b) $\alpha = 135^\circ$, (c) $\alpha = 315^\circ$, (d) $\alpha = 300^\circ$.

Zadanie 13.7. Znajdź najmniejszy kąt dodatni α o jaki należy obrócić punkt $P(1,0)$ wokół początku układu współrzędnych, aby otrzymać punkt Q, jeżeli

- (a) $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, (b) $Q(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, (c) $Q(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, (d) $Q(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Zadanie 13.8. Na podstawie definicji oblicz funkcje trygonometryczne kąta

- (a) 0° , (c) 120° , (e) 240° ,
(b) 90° , (d) 150° , (f) 300° .

Zadanie 13.9. Oblicz

- (a) $\sin 480^\circ$, (e) $\cos 405^\circ$, (i) $\operatorname{tg} 315^\circ$, (m) $\operatorname{ctg} 240^\circ$,
(b) $\sin 510^\circ$, (f) $\cos 420^\circ$, (j) $\operatorname{tg} 330^\circ$, (n) $\operatorname{ctg} 210^\circ$,
(c) $\sin 780^\circ$, (g) $\cos 840^\circ$, (k) $\operatorname{tg} 960^\circ$, (o) $\operatorname{ctg} 675^\circ$,
(d) $\sin 750^\circ$, (h) $\cos 855^\circ$, (l) $\operatorname{tg} 945^\circ$, (p) $\operatorname{ctg} 690^\circ$.

Zadanie 13.10. Oblicz

- (a) $\sin(-120^\circ)$, (c) $\cos(-240^\circ)$, (e) $\operatorname{tg}(-135^\circ)$, (g) $\operatorname{ctg}(-300^\circ)$,
(b) $\sin(-150^\circ)$, (d) $\cos(-210^\circ)$, (f) $\operatorname{tg}(-120^\circ)$, (h) $\operatorname{ctg}(-330^\circ)$.

Zadanie 13.11. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α wiedząc, że

- (a) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ oraz $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, (e) $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ oraz $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$,
(b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ oraz $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, (f) $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ oraz $\alpha \in (180^\circ, 270^\circ)$,
(c) $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ oraz $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, (g) $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$ oraz $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$,
(d) $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ oraz $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, (h) $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ oraz $\alpha \in (270^\circ, 360^\circ)$.

Zadanie 13.12. Wiedząc że $\cos \alpha + \sin \alpha = \frac{1}{5}$ oraz $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$, oblicz $\cos \alpha - \sin \alpha$.

Zadanie 13.13. Uzasadnij, że dla dowolnych kątów $\alpha, \beta \in (0^\circ, 90^\circ)$ zachodzi wzór $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

UWAGA: Powyższy wzór jest prawdziwy dla dowolnych kątów, jednak metoda geometryczna, którą się posłużymy, wymaga, by kąty α i β były ostre.

Zadanie 13.14. Uzasadnij poniższe tożsamości trygonometryczne

- (a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$,

$$(b) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta),$$

$$(c) (1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) = \cos \alpha,$$

$$(d) (2 \sin^2 \alpha - 1)(2 \sin^2 \beta - 1) = \cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta),$$

$$(e) \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$(f) \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

$$(g) \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha} = \cos 2\alpha,$$

$$(h) \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha.$$

Zadanie 13.15. Oblicz $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 358^\circ + \sin 359^\circ$.

Zadanie 13.16. Korzystając z tożsamości trygonometrycznych oblicz

$$(a) \cos 15^\circ,$$

$$(c) \cos 75^\circ,$$

$$(e) \cos 105^\circ,$$

$$(b) \sin 15^\circ,$$

$$(d) \sin 75^\circ,$$

$$(f) \sin 105^\circ.$$

Zadanie 13.17. Wiedząc, że $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, wyznacz $\sin 2\alpha$.

Zadanie 13.18. Dany jest trójkąt o bokach a, b, c oraz kątach α, β, γ . Udowodnij, że między obwodem tego trójkąta a promieniem R okręgu opisanego na tym trójkącie zachodzi związek:
 $a + b + c = 8R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$.

Zadanie 13.19. Uzasadnij, że dla dowolnego kąta α zachodzą wzoru

$$(a) \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$(b) \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Zadanie 13.20. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$(a) f(x) = \sin x + \cos x,$$

$$(b) f(x) = \sin x - \cos x.$$

Zadanie 13.21. Rozwiąż równanie:

$$(a) \sin x = \frac{1}{2},$$

$$(g) \sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2},$$

$$(b) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$(h) \sin x - \cos x = 1,$$

$$(c) \frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0,$$

$$(i) \sin 2x - \sin 4x = 0,$$

$$(d) \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0,$$

$$(j) \cos 5x + \cos 3x = 0,$$

$$(e) \cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x = 0,$$

$$(k) 2 \cos 2x + 3 = 4 \cos x,$$

$$(f) \sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0,$$

$$(l) 4 \cos^2 x + 4 \sin x = 5.$$

Zadanie 13.22. Rozwiąż równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

Zadanie 13.23. Wykaż, że równanie $\sin x + \sin 2x = 2$ nie ma rozwiązań.

Zadanie 13.24. Zbadaj dla jakie wartości parametru a równanie $\cos x = \frac{5a-2}{2-3a}$ posiada rozwiązanie.

Zadanie 13.25. Rozwiąż nierówność:

(a) $\cos x > -\frac{1}{2}$,

(f) $\sin x + \cos x > 0$,

(b) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$,

(g) $2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 < 0$,

(c) $\cos^2 x - 5 \cos x \leq 0$,

(h) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 < 0$,

(d) $\sin^2 x + 2 \sin x > 0$,

(i) $2 \cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$,

(e) $\sin x - \sqrt{3} \cos x \geq 0$,

(j) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 \geq 0$.

Zadanie 13.26. Na przedziale $(\pi, 2\pi)$ rozwiąż nierówność

$$\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}.$$

Zadanie 13.27. Rozwiąż nierówność $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x \leq \frac{1}{4}$.

Zadanie 13.28. Rozwiąż nierówność $\cos^2 x + \cos^3 x + \dots < 1 + \cos x$.

Zadanie 13.29. Znajdź rozwiązania równania $\sin x + |\sin x| = 0$.

Zadanie 13.30. Na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ rozwiąż nierówność

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x) - 1} > 1.$$

ROZWIĄZANIA

13.1 (a) $30^\circ = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

(b) $60^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$

(c) $135^\circ = 135 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$

(d) $225^\circ = 225 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$

(e) $330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}$

(f) $240^\circ = 240 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}$

13.2 (a) $\frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = 2 \cdot \frac{180}{3} = 120^\circ$

(b) $\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 5 \cdot \frac{180}{6} = 150^\circ$

(c) $\frac{5\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = 5 \cdot \frac{180}{12} = 75^\circ$

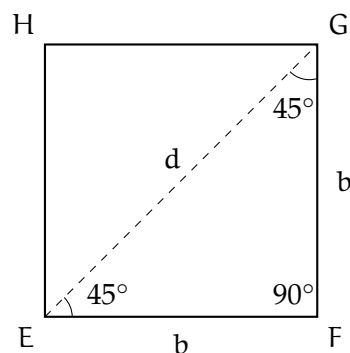
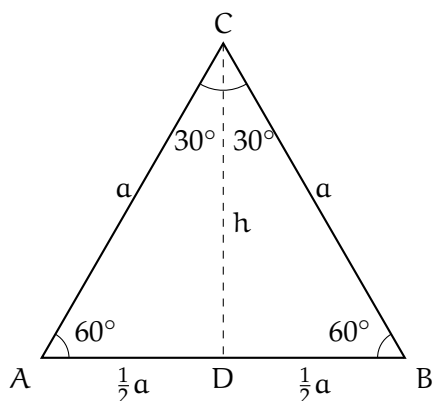
(d) $\frac{7\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 7 \cdot \frac{180}{9} = 140^\circ$

(e) $\frac{8\pi}{15} \cdot \frac{180}{\pi} = 8 \cdot \frac{180}{15} = 96^\circ$

$$(f) \frac{11\pi}{15} \cdot \frac{180}{\pi} = 11 \cdot \frac{180}{15} = 132^\circ$$

13.3 Rozważmy trójkąt równoboczny o boku długości a oraz kwadrat o boku długości b . Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, możemy łatwo wyznaczyć zarówno wysokość trójkąta, jak i przekątną kwadratu. Otrzymujemy

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad d = b\sqrt{2}.$$



Na podstawie definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym ADC dostajemy

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Podobnie korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym EFG dostajemy

$$\sin 45^\circ = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{b}{b} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \frac{b}{b} = 1.$$

13.4 Skorzystamy ze wzorów $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$ oraz $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$ prawdziwych dla każdego kąta $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$. Mamy

$$\begin{aligned} & \operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 88^\circ \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ \\ &= (\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ) \cdot (\operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 88^\circ) \cdot \dots \cdot (\operatorname{ctg} 44^\circ \cdot \operatorname{ctg} 46^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ \\ &= (\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 1^\circ) \cdot (\operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ) \cdot \dots \cdot (\operatorname{ctg} 44^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ) \cdot \operatorname{ctg} 45^\circ = 1. \end{aligned}$$

13.5 Najdłuższym odcinkiem, który wpisać w kwadrat o boku długości 1 jest jego przekątna mająca długość $\sqrt{2}$. Niech α będzie dowolnym kątem trójkąta wpisanego w dany kwadrat. Wtedy jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$, gdzie a i b są długościami boków trójkąta przylegających do kąta α . Ale $a \leq \sqrt{2}$ oraz $b \leq \sqrt{2}$. Stąd $P \leq \sin \alpha$, co pokazuje, że pole trójkąta nie jest większe od sinusa dowolnego jego kąta.

13.6 (a) Niech $Q(x, y)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 120^\circ$. Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Kąt obrotu wynosi 120° , więc kąt $\angle AOQ$ jest równy

$$\angle AOQ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

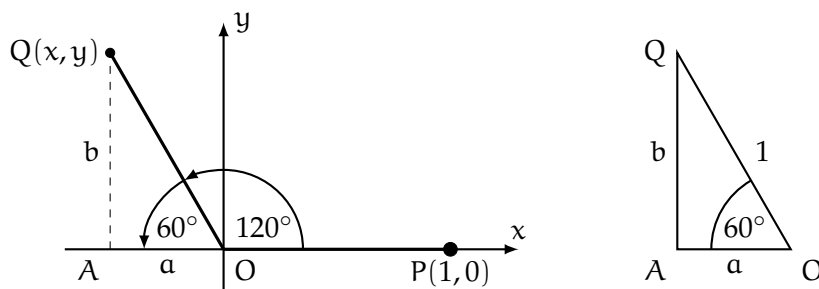
Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$b = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Stąd współrzędne punktu Q wynoszą

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(Zauważmy, że odcięta punktu Q jest ujemna, ponieważ punkt leży po lewej stronie osi OY .)



(b) Niech $Q(x, y)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 135^\circ$. Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Kąt obrotu wynosi 135° , więc kąt $\angle AOQ$ jest równy

$$\angle AOQ = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

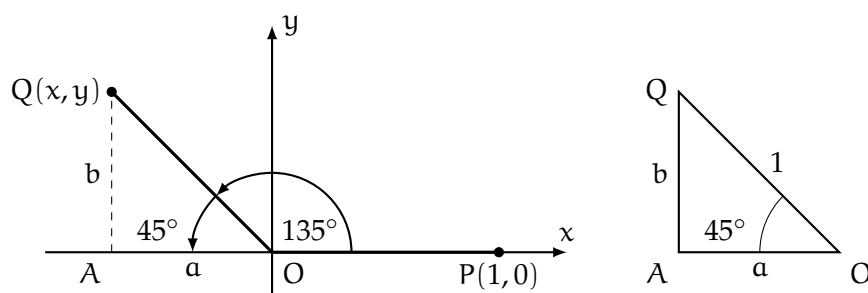
Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$b = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd współrzędne punktu Q wynoszą

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Zauważmy, że odcięta punktu Q jest ujemna, ponieważ punkt leży po lewej stronie osi OY .)



- (c) Niech $Q(x, y)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 315^\circ$. Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Kąt obrotu wynosi 315° , więc kąt $\angle AOQ$ jest równy

$$\angle AOQ = 360^\circ - 315^\circ = 45^\circ.$$

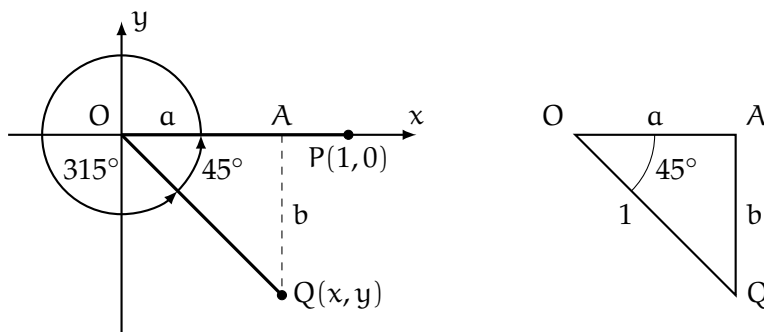
Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$b = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Stąd współrzędne punktu Q wynoszą

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(Zauważmy, że rzędna punktu Q jest ujemna, ponieważ punkt leży poniżej osi OX .)



- (d) Niech $Q(x, y)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 300^\circ$. Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Kąt obrotu wynosi 300° , więc kąt $\angle AOQ$ jest równy

$$\angle AOQ = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ.$$

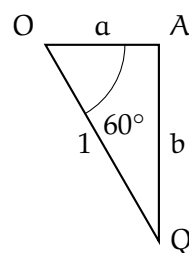
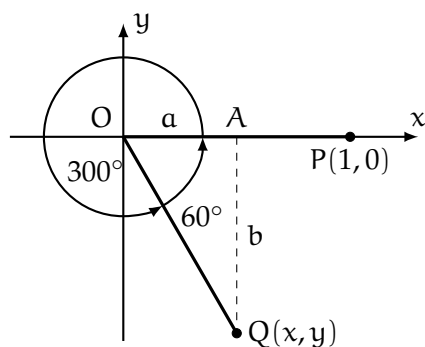
Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$b = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Stąd współrzędne punktu Q wynoszą

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

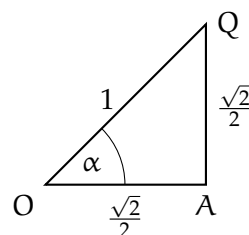
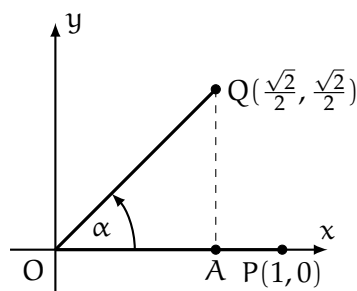
(Zauważmy, że rzędna punktu Q jest ujemna, ponieważ punkt leży poniżej osi OX .)



- 13.7 (a) Niech $Q(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt α . Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

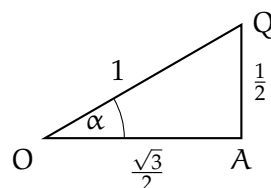
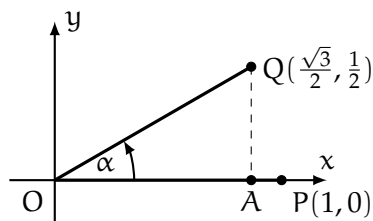
skąd wynika, że $\alpha = \frac{\pi}{4}$.



- (b) Niech $Q(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt α . Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

skąd wynika, że $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

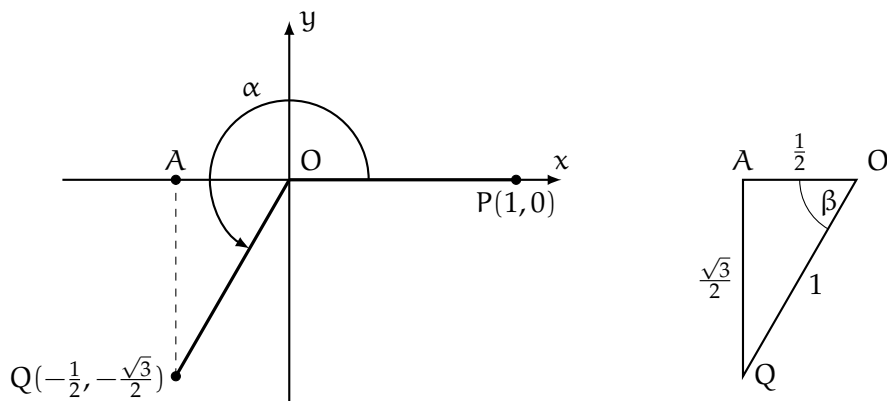


- (c) Niech $Q(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt α . Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A ,

będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Niech β będzie kątem $\angle AOQ$. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ, otrzymujemy:

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2},$$

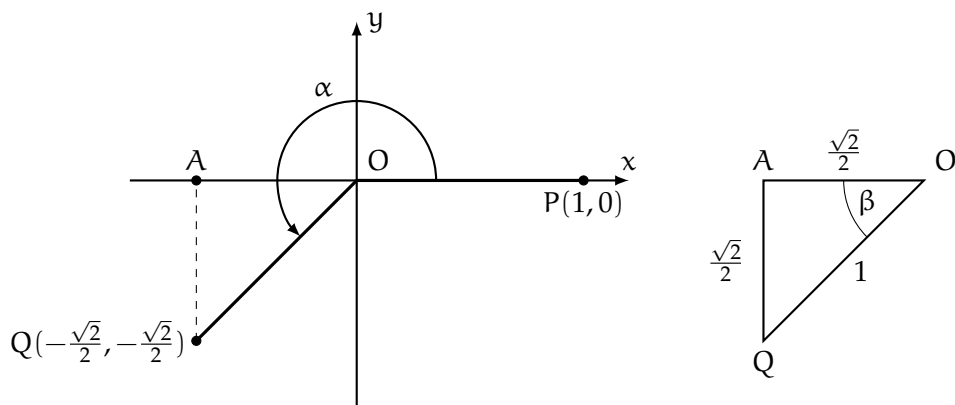
skąd wynika, że $\beta = \frac{\pi}{3}$. Ostatecznie $\alpha = \pi + \beta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.



- (d) Niech $Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1,0)$, leżącego na osi OX, wokół początku układu współrzędnych o kąt α . Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O, w punkcie Q oraz w punkcie A, będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Niech β będzie kątem $\angle AOQ$. Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ, otrzymujemy:

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

skąd wynika, że $\beta = \frac{\pi}{4}$. Ostatecznie $\alpha = \pi + \beta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.



13.8 Naszym celem jest wyznaczenie wartości funkcji trygonometrycznych dla podanego kąta. Dokładnie tę samą procedurę stosowaliśmy już w zadaniu 13.6, kiedy wyznaczaliśmy współrzędne punktu Q, powstającego w wyniku obrotu punktu $P(1,0)$ o zadany kąt.

- (a) Zauważmy, że w wyniku punktu $P(1,0)$ o kąt 0° wokół początku układu współrzędnych, otrzymujemy punkt $Q(1,0)$. Wtedy

$$x = 1, \quad y = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Zatem

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = 0, \quad \cos 0^\circ = \frac{x}{r} = 1, \quad \operatorname{tg} 0^\circ = \frac{y}{x} = 0.$$

Wartość funkcji kotangens dla kąta 0° nie istnieje (dlaczego?).

- (b) Zauważmy, że w wyniku punktu $P(1,0)$ o kąt 90° wokół początku układu współrzędnych, otrzymujemy punkt $Q(0,1)$. Wtedy

$$x = 0, \quad y = 1, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1.$$

Zatem

$$\sin 90^\circ = \frac{y}{r} = 1, \quad \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = 0, \quad \operatorname{ctg} 90^\circ = \frac{x}{y} = 0.$$

Wartość funkcji tangens dla kąta 90° nie istnieje (dlaczego?).

- (c) Niech $Q(x, y)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1,0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 120^\circ$. Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Kąt obrotu wynosi 120° , więc kąt $\angle AOQ$ jest równy

$$\angle AOQ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$b = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Stąd współrzędne punktu Q wynoszą

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

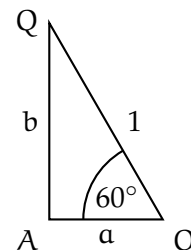
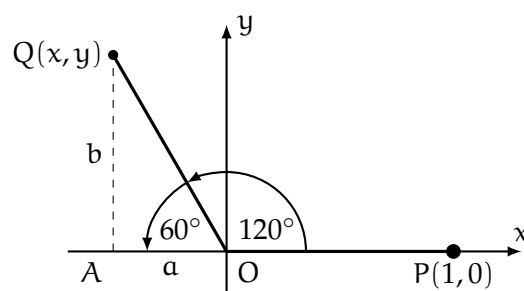
(Zauważmy, że odcięta punktu Q jest ujemna, ponieważ punkt leży po lewej stronie osi OY .) Ponieważ $r = 1$, dostajemy

$$\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{y}{x} = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 120^\circ = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



- (d) Niech $Q(x, y)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1,0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 150^\circ$. Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Kąt obrotu wynosi 150° , więc kąt $\angle AOQ$ jest równy

$$\angle AOQ = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ.$$

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$b = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad a = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Stąd współrzędne punktu Q wynoszą

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

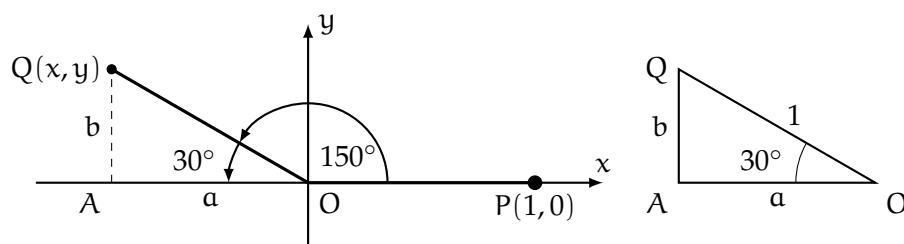
(Zauważmy, że odcięta punktu Q jest ujemna, ponieważ punkt leży po lewej stronie osi OY.) Ponieważ $r = 1$, dostajemy

$$\sin 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 150^\circ = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \frac{y}{x} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} 150^\circ = \frac{x}{y} = -\sqrt{3}.$$



- (e) Niech $Q(x, y)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX, wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 240^\circ$. Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O, w punkcie Q oraz w punkcie A, będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Kąt obrotu wynosi 240° , więc kąt $\angle AOQ$ jest równy

$$\angle AOQ = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ.$$

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ, otrzymujemy:

$$b = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Stąd współrzędne punktu Q wynoszą

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

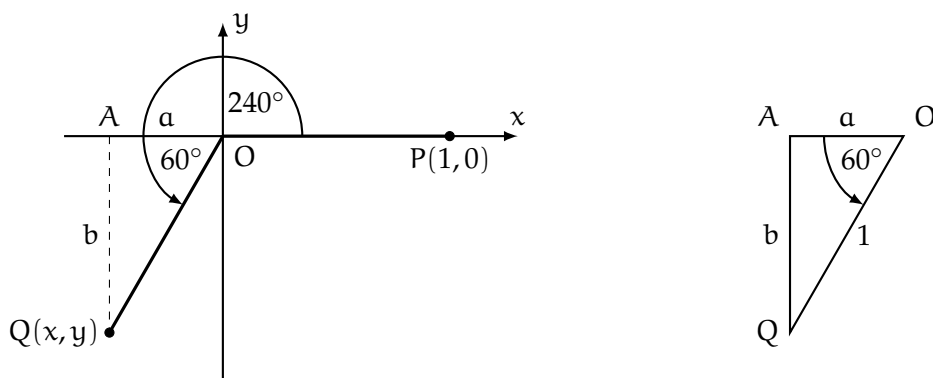
(Zauważmy, że zarówno odcięta, jak i rzędna punktu Q są ujemne, ponieważ punkt leży w III ćwiartce układu współrzędnych.) Ponieważ $r = 1$, dostajemy

$$\sin 240^\circ = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 240^\circ = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 240^\circ = \frac{y}{x} = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 240^\circ = \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



- (f) Niech $Q(x, y)$ będzie punktem powstałym w wyniku obrotu punktu $P(1, 0)$, leżącego na osi OX , wokół początku układu współrzędnych o kąt $\alpha = 300^\circ$. Wyobraźmy sobie trójkąt prostokątny o wierzchołkach w początku układu O , w punkcie Q oraz w punkcie A , będącym rzutem punktu Q na oś OX (zobacz rysunek). Kąt obrotu wynosi 300° , więc kąt $\angle AOQ$ jest równy

$$\angle AOQ = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ.$$

Korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych w trójkącie AOQ , otrzymujemy:

$$b = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Stąd współrzędne punktu Q wynoszą

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

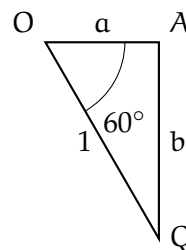
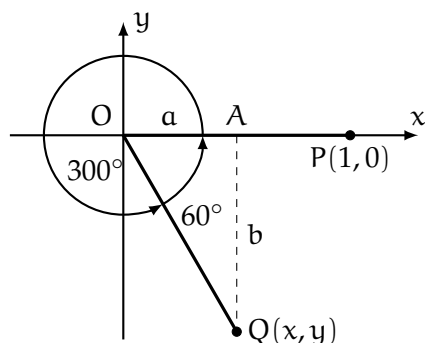
(Zauważmy, że rzędna punktu Q jest ujemna, ponieważ punkt leży w IV ćwiartce układu współrzędnych.) Ponieważ $r = 1$, dostajemy

$$\sin 300^\circ = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 300^\circ = \frac{x}{r} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 300^\circ = \frac{y}{x} = -\sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 300^\circ = \frac{x}{y} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



13.9 Funkcje trygonometryczne kątów większych niż 90° można wyznaczać, stosując wzory redukcyjne lub korzystając z następującego algorytmu. Rozważmy przykład obliczenia $\sin 585^\circ$.

KROK 1. Zapisujemy dany kąt w postaci wyniku dzielenia z resztą przez 90° :

$$585^\circ = 6 \cdot 90^\circ + 45^\circ.$$

KROK 2. Pomijamy wielokrotności 90° , pozostawiając tylko resztę. Jeśli iloraz z Kroku 1 jest parzysty, pozostawiamy funkcję bez zmian. Jeśli natomiast jest nieparzysty, zamieniamy funkcję na jej kofunkcję: $\sin \leftrightarrow \cos$ oraz $\operatorname{tg} \leftrightarrow \operatorname{ctg}$. W naszym przykładzie iloraz wynosi 6 – jest parzysty, więc funkcja sinus „pozostaje”:

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

KROK 3. Ustalamy znak końcowego wyniku, w zależności od ćwiartki, w której leży pierwotny kąt. Kąt 585° leży w III ćwiartce, zatem $\sin 585^\circ$ przyjmuje wartość ujemną.

KROK 4. Zapisujemy ostateczny wynik:

$$\sin 585^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Przejdziemy teraz do rozwiązywania zadań.

$$(a) \sin 480^\circ = \sin[5 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(b) \sin 510^\circ = \sin[5 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(c) \sin 780^\circ = \sin[8 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(d) \sin 750^\circ = \sin[8 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(e) \cos 405^\circ = \cos[4 \cdot 90^\circ + 45^\circ] = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(f) \cos 420^\circ = \cos[4 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(g) \cos 840^\circ = \cos[8 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$(h) \cos 855^\circ = \cos[9 \cdot 90^\circ + 45^\circ] = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(i) \operatorname{tg} 315^\circ = \operatorname{tg}[3 \cdot 90^\circ + 45^\circ] = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$$

$$(j) \operatorname{tg} 330^\circ = \operatorname{tg}[3 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(k) \operatorname{tg} 960^\circ = \operatorname{tg}[10 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$(l) \operatorname{tg} 945^\circ = \operatorname{tg}[10 \cdot 90^\circ + 45^\circ] = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

$$(m) \operatorname{ctg} 240^\circ = \operatorname{ctg}[2 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(n) \operatorname{ctg} 210^\circ = \operatorname{ctg}[2 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = \operatorname{tg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$(o) \operatorname{ctg} 675^\circ = \operatorname{ctg}[7 \cdot 90^\circ + 45^\circ] = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$$

$$(p) \operatorname{ctg} 690^\circ = \operatorname{ctg}[7 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\sqrt{3}$$

13.10 Aby obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ujemnych, w pierwszym kroku należy skorzystać z własności parzystości i nieparzystości poszczególnych funkcji. Przypomnijmy, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzą zależności:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Przejdziemy teraz do rozwiązywania zadań.

$$(a) \sin(-120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin[1 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(b) \sin(-150^\circ) = -\sin 150^\circ = -\sin[1 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$(c) \cos(-240^\circ) = \cos 240^\circ = \cos[2 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$(d) \cos(-210^\circ) = \cos 210^\circ = \cos[2 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(e) \operatorname{tg}(-135^\circ) = -\operatorname{tg} 135^\circ = -\operatorname{tg}[1 \cdot 90^\circ + 45^\circ] = -(-\operatorname{ctg} 45^\circ) = 1$$

$$(f) \operatorname{tg}(-120^\circ) = -\operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg}[1 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = -(-\operatorname{ctg} 30^\circ) = \sqrt{3}$$

$$(g) \operatorname{ctg}(-300^\circ) = -\operatorname{ctg} 300^\circ = -\operatorname{ctg}[3 \cdot 90^\circ + 30^\circ] = -(-\operatorname{tg} 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(h) \operatorname{ctg}(-330^\circ) = -\operatorname{ctg} 330^\circ = -\operatorname{ctg}[3 \cdot 90^\circ + 60^\circ] = -(-\operatorname{tg} 60^\circ) = \sqrt{3}$$

13.11 (a) Korzystając ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostajemy

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Ponieważ kąt α leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, $\cos \alpha$ jest dodatni. Zatem

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Pamiętając o tym, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Pozostaje teraz obliczyć $\operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(b) Korzystając ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostajemy

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

Ponieważ kąt α leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych, $\sin \alpha$ jest dodatni. Zatem

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Pamiętając o tym, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}.$$

Pozostaje teraz obliczyć $\operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

(c) Korzystając ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostajemy

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

Ponieważ kąt α leży w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, $\sin \alpha$ jest dodatni. Zatem

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Pamiętając o tym, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Pozostaje teraz obliczyć $\operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

(d) Korzystając ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostajemy

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}.$$

Ponieważ kąt α leży w drugiej ćwiartce układu współrzędnych, $\cos \alpha$ jest ujemny. Zatem

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Pamiętając o tym, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

Pozostaje teraz obliczyć $\operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\sqrt{15}.$$

(e) Korzystając ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostajemy

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Ponieważ kąt α leży w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, $\sin \alpha$ jest ujemny. Zatem

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5}.$$

Pamiętając o tym, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}.$$

Pozostaje teraz obliczyć $\operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{4}.$$

(f) Korzystając ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostajemy

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}.$$

Ponieważ kąt α leży w trzeciej ćwiartce układu współrzędnych, $\cos \alpha$ jest ujemny. Zatem

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Pamiętając o tym, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}.$$

Pozostaje teraz obliczyć $\operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}.$$

(g) Korzystając ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostajemy

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}.$$

Ponieważ kąt α leży w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, $\cos \alpha$ jest dodatni. Zatem

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Pamiętając o tym, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{1}{5}}{\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Pozostaje teraz obliczyć $\operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -2\sqrt{6}.$$

(h) Korzystając ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, dostajemy

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}.$$

Ponieważ kąt α leży w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, $\sin \alpha$ jest ujemny. Zatem

$$\sin \alpha = -\frac{3}{5}.$$

Pamiętając o tym, że

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

mamy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}.$$

Pozostaje teraz obliczyć $\operatorname{ctg} \alpha$. Ponieważ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, otrzymujemy

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{4}{3}.$$

13.12 Zauważmy, że

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

oraz

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Dodając powyższe równości stronami, otrzymujemy

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 + (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 2,$$

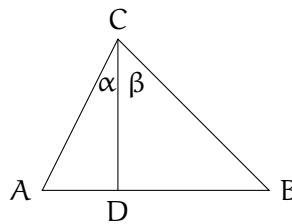
skąd

$$(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = 2 - (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 2 - \frac{1}{25} = \frac{49}{25}.$$

Ponieważ kąt α leży w II ćwiartce układu współrzędnych, $\cos \alpha < 0$ oraz $\sin \alpha > 0$. Zatem $\cos \alpha - \sin \alpha < 0$. W konsekwencji

$$\cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{7}{5}.$$

13.13 Rozważmy trójkąty ACD oraz BCD o tej własności, że kąty ACD oraz BCD mają miary odpowiednio α i β , a kąty ADC i BDC są kątami prostymi. Wtedy trójkąt ABC ma kąt ACB miary $\alpha + \beta$ a jego wysokością jest odcinek CD (zobacz rysunek).



Wtedy pole trójkąta ABC możemy wyrazić na dwa sposoby: jako $P_{ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin(\alpha + \beta)$ oraz $P_{ABC} = P_{ACD} + P_{BCD}$. Ponadto $P_{ACD} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |CD| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin \alpha \cos \beta$ oraz $P_{BCD} = \frac{1}{2}|CD| \cdot |BC| \sin \beta = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cos \alpha \sin \beta$. Stąd, po porównaniu, powyższych dwóch wzorów na pole trójkąta ABC, otrzymujemy $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.

13.14 (a) Mamy

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 \\ &= (\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) + (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \\ &= 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \stackrel{(1)}{=} 2, \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika ze wzoru jedynkowego $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

(b) Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} & \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ & \stackrel{(2)}{=} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \stackrel{(3)}{=} \operatorname{tg}(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika ze wzorów łączących funkcje tangens, sinus i kosinus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta},$$

(2) wynika ze wzoru na sinus i cosinus sumy kątów:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

(3) wynika ze wzoru łączącego funkcje tangens, sinus i kosinus:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned} (1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha \right) &\stackrel{(1)}{=} (1 + \sin \alpha) \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = (1 + \sin \alpha) \left(\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ &= \frac{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} \stackrel{(2)}{=} \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \stackrel{(3)}{=} \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha, \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika ze wzoru łączącego funkcje tangens, sinus i cosinus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

(2) wynika ze wzoru skróconego mnożenia $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$,

(3) wynika ze wzoru jedynkowego: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

(d) Mamy

$$\begin{aligned} &\cos^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta) \\ &= [\cos(\alpha + \beta)]^2 - [\sin(\alpha - \beta)]^2 \\ &\stackrel{(1)}{=} [\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta]^2 - [\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta]^2 \\ &= (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) \\ &\quad - (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) \\ &= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &\quad - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ &= (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta) - (\sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta) \\ &= \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - \sin^2 \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \\ &\stackrel{(2)}{=} [(1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha] [(1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta] \\ &= (2 \sin^2 \alpha - 1)(2 \sin^2 \beta - 1), \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika ze wzoru na sinus różnicy i kosinus sumy kątów:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

(2) wynika ze jedynki trygonometrycznej: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

(e) Mamy

$$\begin{aligned} & \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ & \stackrel{(1)}{=} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \stackrel{(2)}{=} \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \\ & = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \stackrel{(3)}{=} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \stackrel{(4)}{=} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \stackrel{(5)}{=} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika ze wzorów na sinus oraz kosinus podwójnego kąta:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

(2) wynika ze wzoru jedynkowego: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

(3) wynika ze wzorów na sinus i kosinus podwójnego kąta zastosowanych dla kąta α :

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

(4) wynika ze wzoru jedynkowego:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1,$$

(5) wynika ze wzoru łączącego funkcje tangens, sinus i cosinus:

$$\operatorname{tg} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

(f) Mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha & \stackrel{(1)}{=} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} \\ & \stackrel{(2)}{=} \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \stackrel{(3)}{=} \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha, \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika ze wzoru łączącego tangens, sinus i kosinus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

(2) wynika ze wzoru jedynkowego: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

(3) wynika ze wzoru łączącego tangens, sinus i kosinus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

(g) Mamy

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha} &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha}} = \frac{1}{1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}} = \frac{1}{\frac{\cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\cos 2\alpha}} \\
 &= \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha} \stackrel{(3)}{=} \frac{\cos 2\alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \sin^2 \alpha} \\
 &= \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \stackrel{(4)}{=} \cos 2\alpha,
 \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika ze wzoru łączącego tangens, sinus i kosinus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

zastosowanego dla kąta α oraz 2α z osobna,

(2) wynika ze wzoru na sinus podwojonego kąta: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

(3) wynika ze wzoru na kosinus podwojonego kąta: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$,

(4) wynika ze wzoru jedynkowego: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

(h) Mamy

$$\begin{aligned}
 &\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \\
 &\stackrel{(1)}{=} \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} \\
 &= \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \stackrel{(2)}{=} \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \cos \alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\
 &\stackrel{(4)}{=} \frac{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(1 - \cos^2 \alpha) + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\
 &\stackrel{(5)}{=} \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \sin \alpha,
 \end{aligned}$$

gdzie równość

(1) wynika ze wzoru łączącego tangens, sinus i kosinus:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

(2) wynika ze wzoru jedynkowego:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1.$$

(3) wynika ze wzoru na kosinus podwojonego kąta:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

(4) wynika ze wzoru na sinus podwojonego kąta: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

(5) wynika ze wzoru jedynkowego: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

13.15 Skorzystamy ze wzoru $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$. Mamy

$$\begin{aligned} & \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 358^\circ + \sin 359^\circ \\ &= (\sin 1^\circ + \sin 359^\circ) + (\sin 2^\circ + \sin 358^\circ) + \dots + (\sin 179^\circ + \sin 181^\circ) + \sin 180^\circ \\ &= 2 \sin 180^\circ \cos 179^\circ + 2 \sin 180^\circ \cos 178^\circ + \dots + 2 \sin 180^\circ \cos 1^\circ + \sin 180^\circ = 0, \end{aligned}$$

bo $\sin 180^\circ = 0$.

13.16 (a) Mamy

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

(b) Mamy

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

(c) Mamy

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

(d) Mamy

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

(e) Mamy

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

(f) Mamy

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

13.17 Podnosząc obydwie strony równości $\sin \alpha + \cos \alpha = m$, dostajemy

$$m^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ponieważ $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$, więc $1 + \sin 2\alpha = m^2$. Zatem $\sin 2\alpha = m^2 - 1$.

13.18 Korzystając z twierdzenia sinusów mamy

$$a = R \sin \alpha, \quad b = R \sin \beta, \quad c = R \sin \gamma.$$

Pamiętając, że α, β, γ są kątami w trójkącie, a zatem $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$, otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) \\ &= 2R \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right) \\ &= 4R \left[\sin \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right] \\ &= 4R \left[\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \frac{\gamma}{2} \right] \\ &= 4R \cos \frac{\gamma}{2} \left[\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right] \\ &= 4R \cos \frac{\gamma}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 8R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned}$$

13.19 (a) Korzystając ze wzoru na sinus sumy oraz sinus i kosinus podwojonego kąta dla $\alpha \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) \\ &= \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha \\ &= \sin \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^3 \alpha \\ &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

(b) Podobnie, jak w poprzednim podpunkcie, mamy

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(\alpha + 2\alpha) \\ &= \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha \\ &= \cos \alpha \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos^3 \alpha - 3(1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos \alpha \\ &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

13.20 (a) Aby znaleźć wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = \sin x + \cos x$, sprowadzimy ją do postaci $f(x) = A \sin(x + \omega)$, gdzie A, ω są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Zauważmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right).$$

Ponieważ

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

możemy zapisać powyższy wzór w postaci

$$f(x) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right).$$

Korzystając ze wzoru na sinus sumy, otrzymujemy więc

$$f(x) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Ponieważ wartości funkcji sinus mieszczą się w przedziale $[-1, 1]$, a wartości skrajne -1 oraz $+1$ są osiągalne, możemy stwierdzić, że funkcja f przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Zatem wartość największa funkcji f to $\sqrt{2}$, a wartość najmniejsza to $-\sqrt{2}$.

- (b) Aby znaleźć wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x) = \sin x - \cos x$, sprowadzimy ją do postaci $f(x) = A \sin(x + \omega)$, gdzie A, ω są pewnymi liczbami rzeczywistymi.

Zauważmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right).$$

Ponieważ

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

możemy zapisać powyższy wzór w postaci

$$f(x) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right).$$

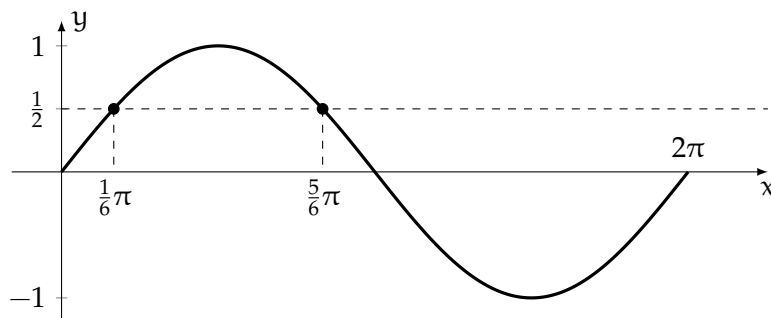
Korzystając ze wzoru na sinus różnicy, otrzymujemy więc

$$f(x) = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Ponieważ wartości funkcji sinus mieszczą się w przedziale $[-1, 1]$, a wartości skrajne -1 oraz $+1$ są osiągalne, możemy stwierdzić, że funkcja f przyjmuje wszystkie wartości z przedziału $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Zatem wartość największa funkcji f to $\sqrt{2}$, a wartość najmniejsza to $-\sqrt{2}$.

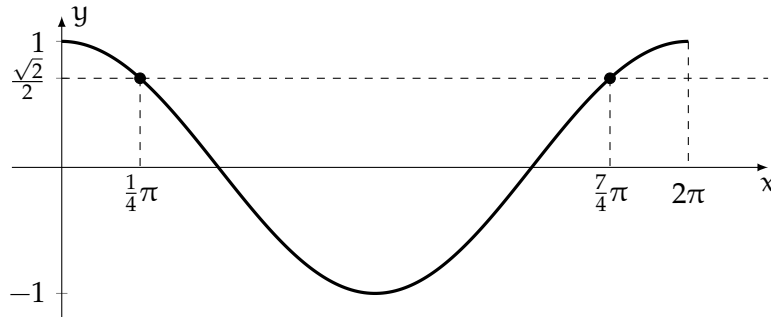
- 13.21** (a) Z wykresu funkcji sinus możemy odczytać, że równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi)$ ma dwa rozwiązania: $x = \frac{1}{6}\pi$ oraz $x = \frac{5}{6}\pi$. Ponieważ funkcja sinus jest 2π -okresowa stwierdzamy, to wszystkie rozwiązania równania $\sin x = \frac{1}{2}$ można zapisać w postaci:

$$x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



- (b) Z wykresu funkcji cosinus możemy odczytać, że równanie $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ w przedziale $[0, 2\pi)$ ma dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{4}$ oraz $x = \frac{7\pi}{4}$. Ponieważ funkcja cosinus jest 2π -okresowa, stwierdzamy, że wszystkie rozwiązania równania $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ można zapisać w postaci:

$$x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



- (c) Przypomnijmy, że ułamek jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy licznik jest równy zero, a mianownik różny od zera. Równanie

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$$

możemy więc sprowadzić do następującej koniunkcji:

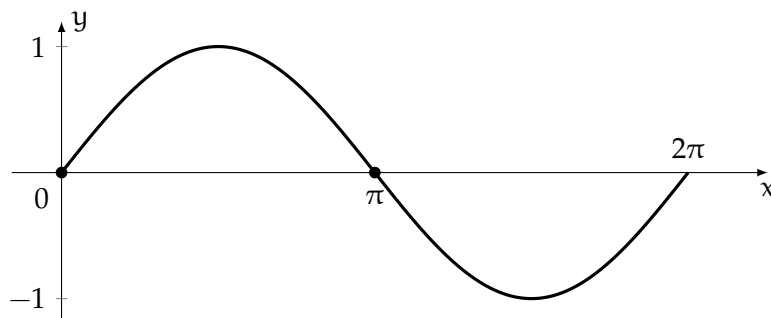
$$\sin x = 0 \quad \text{oraz} \quad \cos x \neq 1.$$

W przedziale $[0, 2\pi)$ równanie $\sin x = 0$ ma dwa rozwiązania: $x = 0$ oraz $x = \pi$. Jednak dla $x = 0$ mamy $\cos x = 1$, co oznacza, że rozwiązanie to odrzucamy. Pozostaje więc tylko: $x = \pi$. Ponieważ funkcja sinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania równania

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$$

można zapisać w postaci:

$$x = \pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



- (d) Przypomnijmy, że ułamek jest równy zero wtedy i tylko wtedy, gdy licznik jest równy zero, a mianownik różny od zera. Równanie

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0$$

możemy więc sprowadzić do następującej koniunkcji:

$$\cos x = 0 \quad \text{oraz} \quad \sin x \neq 1.$$

W przedziale $[0, 2\pi)$ równanie $\cos x = 0$ ma dwa rozwiązania:

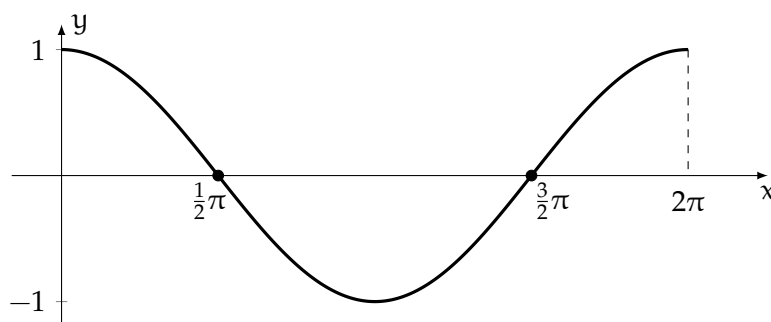
$$x = \frac{1}{2}\pi \quad \text{oraz} \quad x = \frac{3}{2}\pi.$$

Jednak dla $x = \frac{1}{2}\pi$ mamy $\sin x = 1$, co oznacza, że rozwiązanie to odrzucamy. Pozostaje więc tylko:

$$x = \frac{3}{2}\pi.$$

Ponieważ funkcja cosinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania równania można zapisać w postaci:

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(e) Rozważamy równanie

$$\cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x = 0.$$

Najpierw wyłączamy $\cos x$ przed nawias, co daje

$$\cos x \left(\cos x + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Z tego wynika, że równanie jest równoważne alternatywie dwóch prostszych równań:

$$\cos x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

W przedziale $[0, 2\pi)$ równanie $\cos x = 0$ ma dwa rozwiązania

$$x = \frac{1}{2}\pi, \quad x = \frac{3}{2}\pi,$$

podobnie jak równanie $\cos x = -\frac{1}{2}$, którego rozwiązaniami są z kolei

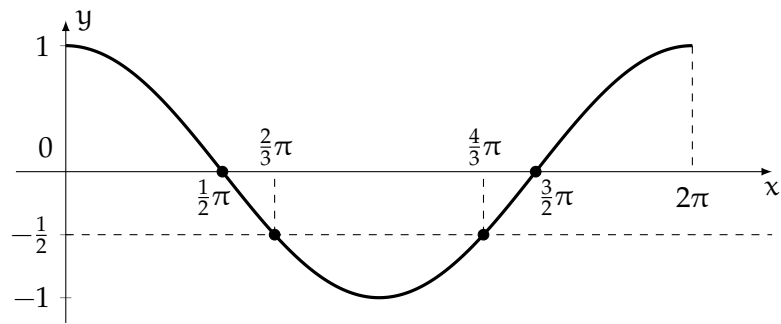
$$x = \frac{2}{3}\pi, \quad x = \frac{4}{3}\pi.$$

Ponieważ funkcja kosinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania równania

$$\cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x = 0$$

można zapisać w postaci:

$$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(f) Rozważamy równanie

$$\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0.$$

Najpierw wyłączamy $\sin x$ przed nawias, co daje

$$\sin x \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$$

Z tego wynika, że równanie jest równoważne alternatywie dwóch prostszych równań:

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

W przedziale $[0, 2\pi)$ równanie $\sin x = 0$ ma dwa rozwiązania

$$x = 0, \quad x = \pi,$$

podobnie jak równanie $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, którego rozwiązaniami są z kolei

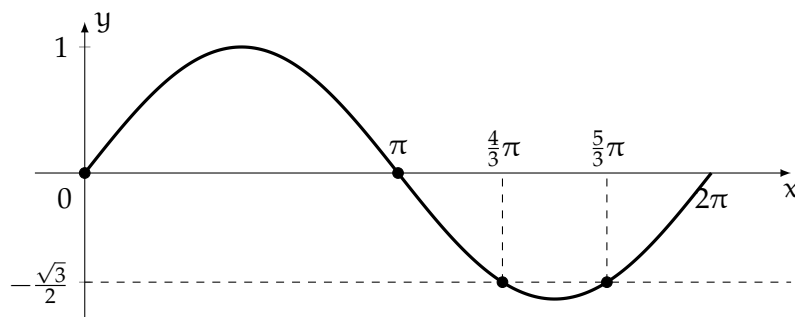
$$x = \frac{4}{3}\pi, \quad x = \frac{5}{3}\pi.$$

Ponieważ funkcja sinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania równania

$$\sin^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$$

można zapisać w postaci:

$$x = k\pi, \quad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(g) Rozważamy równanie

$$\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}.$$

Najpierw zauważamy, że dzieląc obydwie strony przez 2, możemy je przekształcić do postaci

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ponieważ

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

dostajemy

$$\cos \frac{\pi}{6} \sin x + \sin \frac{\pi}{6} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Korzystając ze wzoru na sinus sumy, otrzymujemy więc

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zwróćmy uwagę, że w przedziale $[0, 2\pi)$ równanie $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ma dwa rozwiązania (zobacz rysunek):

$$t = \frac{1}{4}\pi, \quad t = \frac{3}{4}\pi.$$

Zatem rozwiązaniami równania

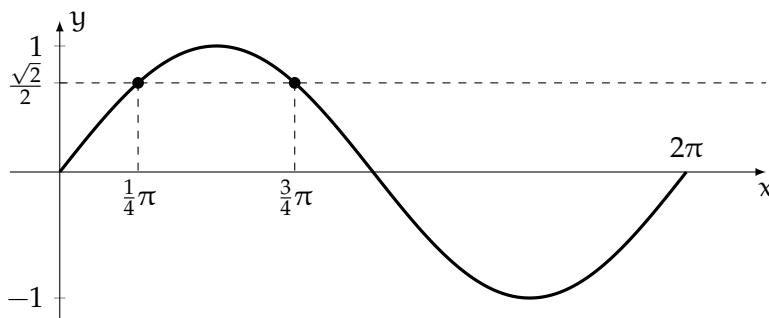
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

w przedziale $[0, 2\pi)$ są liczby

$$x = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{12}\pi, \quad x = \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{12}\pi.$$

Ponieważ funkcja sinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania rozważanego równania można zapisać w postaci:

$$x = \frac{1}{12}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{7}{12}\pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(h) Rozważamy równanie

$$\sin x - \cos x = 1.$$

Najpierw dzielimy obie strony przez $\sqrt{2}$, aby doprowadzić je do postaci:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ponieważ

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{oraz} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

dostajemy

$$\cos \frac{\pi}{4} \sin x - \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Korzystając ze wzoru na sinus różnicy, otrzymujemy więc

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Zwróćmy uwagę, że w przedziale $[0, 2\pi)$ równanie $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ma dwa rozwiązania (zobacz rysunek):

$$t = \frac{1}{4}\pi, \quad t = \frac{3}{4}\pi.$$

Zatem rozwiązaniami równania

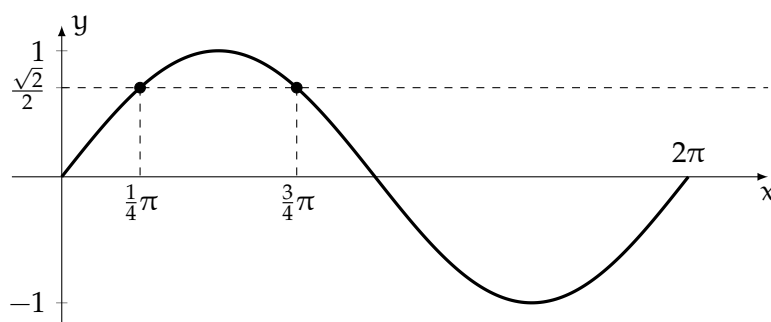
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

w przedziale $[0, 2\pi)$ są liczby

$$x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi, \quad x = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi = \pi.$$

Ponieważ funkcja sinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania rozważanego równania można zapisać w postaci:

$$x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(i) Korzystając ze wzoru na różnicę sinusów oraz z nieparzystości funkcji sinus, otrzymujemy

$$\sin 2x - \sin 4x = 2 \cos \frac{2x + 4x}{2} \sin \frac{2x - 4x}{2} = 2 \cos 3x \cdot \sin(-x) = -2 \cos 3x \cdot \sin x.$$

Oznacza to, że równanie

$$\sin 2x - \sin 4x = 0$$

jest równoważne równaniu

$$\sin x \cdot \cos 3x = 0$$

czyli alternatywie dwóch prostszych równań:

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 3x = 0.$$

Przyjrzyjmy się każdemu przypadkowi osobno. Równanie $\sin x = 0$ w przedziale $[0, 2\pi)$ ma dwa rozwiązania

$$x = 0, \quad x = \pi.$$

Ponieważ funkcja sinus jest 2π -okresowa wszystkie rozwiązania tego równania można ująć w jednej serii:

$$x = k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Równanie $\cos 3x = 0$ w przedziale $[0, 2\pi)$ ma również dwa rozwiązania

$$3x = \frac{1}{2}\pi, \quad 3x = \frac{3}{2}\pi.$$

Biorąc pod uwagę 2π -okresowość funkcji kosinus, wszystkie rozwiązania możemy połączyć w jedną serię:

$$3x = \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Podsumowując, wszystkie rozwiązania równania $\sin 2x - \sin 4x = 0$ można zapisać jako

$$x = k\pi, \quad x = \frac{1}{6}\pi + \frac{k}{3}\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

(j) Korzystając ze wzoru na sumę kosinusów, otrzymujemy

$$\cos 5x + \cos 3x = 2 \cos \frac{5x + 3x}{2} \cos \frac{5x - 3x}{2} = 2 \cos 4x \cdot \cos x.$$

Oznacza to, że równanie

$$\cos 5x + \cos 3x = 0$$

jest równoważne równaniu

$$\cos x \cdot \cos 4x = 0,$$

czyli alternatywie dwóch prostszych równań:

$$\cos x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos 4x = 0.$$

Przyjrzyjmy się każdemu przypadkowi osobno. Równanie $\cos x = 0$ w przedziale $[0, 2\pi)$ ma dwa rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{3\pi}{2}.$$

Ponieważ funkcja kosinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania tego równania można ująć w jednej serii:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Równanie $\cos 4x = 0$ w przedziale $[0, 2\pi)$ ma również dwa rozwiązania

$$4x = \frac{\pi}{2}, \quad 4x = \frac{3\pi}{2}.$$

Biorąc pod uwagę 2π -okresowość funkcji kosinus, wszystkie rozwiązania możemy połączyć w jedną serię:

$$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Podsumowując, wszystkie rozwiązania równania $\cos 5x + \cos 3x = 0$ można zapisać jako

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k}{4}\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

(k) Korzystając ze wzoru na kosinus podwojonego kąta, możemy równanie

$$2 \cos 2x + 3 = 4 \cos x,$$

sprowadzić do postaci

$$2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x + 3 = 4 \cos x.$$

Stąd na mocy wzoru jedynkowego, otrzymujemy

$$2 \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) + 3 = 4 \cos x.$$

Upraszczając wyrazy podobne, dostajemy ostatecznie równanie kwadratowe:

$$4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0.$$

Zawróćmy uwagę, że możemy je zapisać jako

$$(2 \cos x - 1)^2 = 0,$$

skąd otrzymujemy

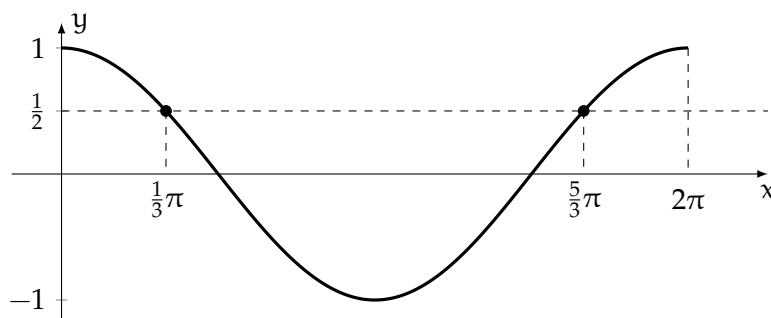
$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

W przedziale $[0, 2\pi)$ równanie $\cos x = \frac{1}{2}$ ma dwa rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5\pi}{3}.$$

Uwzględniając fakt, że funkcja kosinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania równania $2 \cos 2x + 3 = 4 \cos x$ możemy zapisać w postaci:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(1) Korzystając ze wzoru jedynkowego, możemy równanie

$$4 \cos^2 x + 4 \sin x = 5$$

sprowadzić do postaci

$$4(1 - \sin^2 x) + 4 \sin x = 5.$$

Upraszczając wyrazy podobne, otrzymujemy równanie kwadratowe względem:

$$-4 \sin^2 x + 4 \sin x - 1 = 0,$$

czyli

$$4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1 = 0.$$

Zawróćmy uwagę, że można je zapisać jako:

$$(2 \sin x - 1)^2 = 0,$$

skąd otrzymujemy

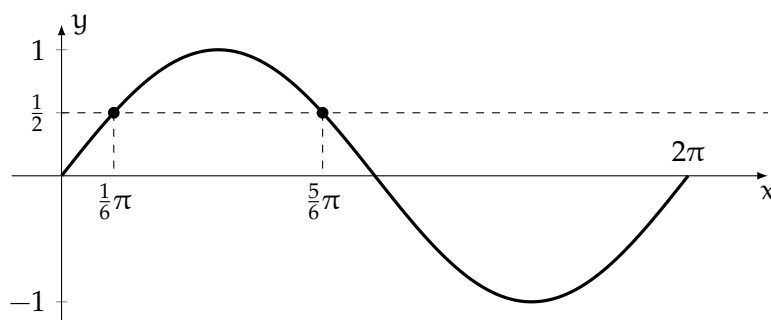
$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

W przedziale $[0, 2\pi)$ równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ ma dwa rozwiązania

$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5\pi}{6}.$$

Uwzględniając fakt, że funkcja sinus jest 2π -okresowa, wszystkie rozwiązania równania $4\cos^2 x + 4\sin x = 5$ możemy zapisać w postaci:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



13.22 Zauważamy, że wyrażenie $\sin^4 x + \cos^4 x$ można przekształcić korzystając ze wzoru skróconego mnożenia w następujący sposób:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

Ponieważ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, równanie $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ przyjmuje więc postać:

$$1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1,$$

skąd

$$\sin^2 x \cos^2 x = 0.$$

Oznacza to, że wyjściowe równanie jest równoważne alternatywie dwóch prostszych równań:

$$\sin x = 0 \quad \text{lub} \quad \cos x = 0.$$

Jak już wiemy, rozwiązania równania $\sin x = 0$ są postaci

$$x = k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z},$$

zaś równania $\cos x = 0$ postaci

$$x = \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Łącząc obydwie serie rozwiązań, stwierdzamy, że wszystkie rozwiązania równania $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ możemy zapisać w postaci ogólnej:

$$x = \frac{k}{2}\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

13.23 Załóżmy nie wprost, że x_* jest rozwiązaniem równania $\sin x + \sin 2x = 2$. Wtedy $\sin x_* + \sin 2x_* = 2$. Ale funkcja sinus przyjmuje wartości wyłącznie z przedziału $[-1, 1]$. Zatem $\sin x_* = \sin 2x_* = 1$. Stąd $x_* = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ oraz $2x_* = \frac{\pi}{2} + 2l\pi$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$. W konsekwencji $\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{4} + l\pi$ oraz $l = 2k + \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że równanie $\sin x + \sin 2x = 2$ nie posiada rozwiązań.

13.24 Funkcja kosinus przyjmuje wartości wyłącznie z przedziału $[-1, 1]$. Oznacza to, że równanie

$$\cos x = \frac{5a - 2}{2 - 3a}$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-1 \leq \frac{5a - 2}{2 - 3a} \leq 1.$$

Należy przy tym pamiętać, że wyrażenie po prawej stronie jest określone jedynie dla $a \neq \frac{3}{2}$.

Przeanalizujemy teraz obie nierówności osobno. Zaczniemy od nierówności prawej:

$$\frac{5a - 2}{2 - 3a} \leq 1.$$

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$\frac{5a - 2}{2 - 3a} - 1 = \frac{8a - 4}{2 - 3a}.$$

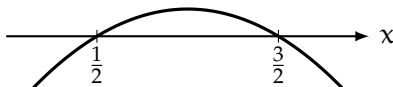
Zatem rozważana nierówność jest równoważna nierówności

$$\frac{8a - 4}{2 - 3a} \leq 0.$$

Przechodząc do postaci iloczynowej $4(2a - 1)(2 - 3a) \leq 0$, stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności

$$\frac{5a - 2}{2 - 3a} \leq 1$$

są liczby $a \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$; należy pamiętać, że $a \neq \frac{3}{2}$.



Przejdźmy teraz do nierówności lewej:

$$-1 \leq \frac{5a - 2}{2 - 3a}.$$

Postępując analogicznie jak wcześniej, sprowadzamy ją do postaci

$$\frac{2a}{2 - 3a} \geq 0.$$

Na podstawie wykresu funkcji $a \mapsto 2a(2 - 3a)$ stwierdzamy, że nierówność tak jest spełniona dla $a \in [0, \frac{3}{2})$.



Podsumowując, obie nierówności

$$-1 \leq \frac{5a - 2}{2 - 3a} \leq 1$$

są spełnione, gdy jednocześnie

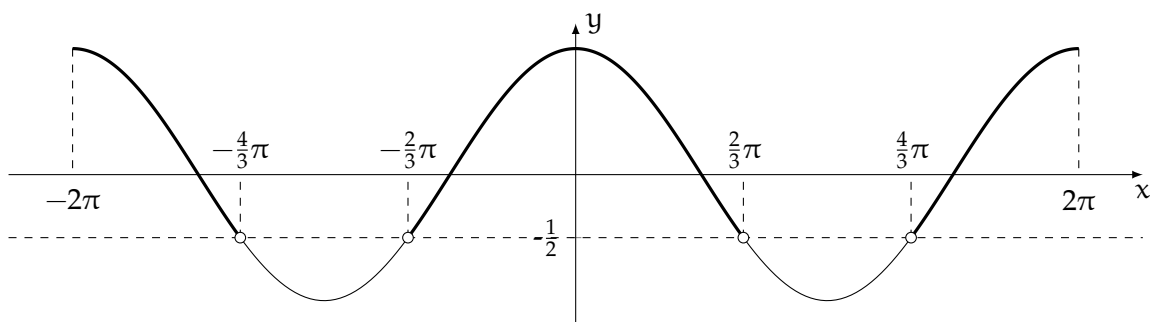
$$a \in (-\infty, \frac{1}{2}] \cup (\frac{3}{2}, +\infty) \quad \text{oraz} \quad a \in [0, \frac{3}{2}).$$

Oznacza to, że równanie

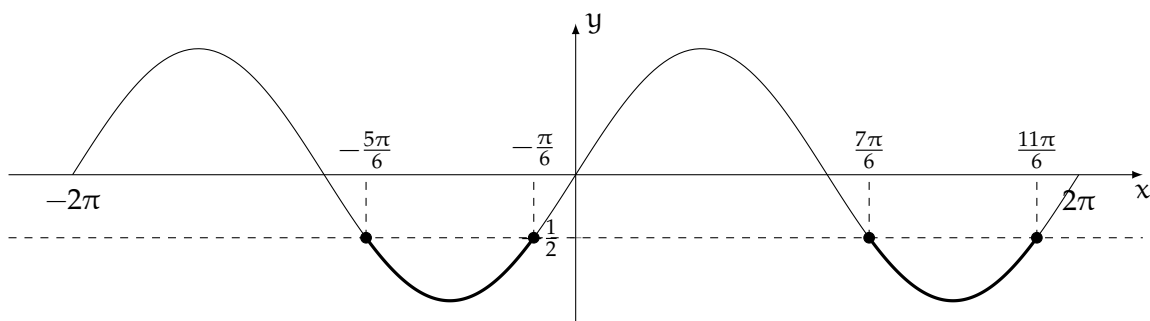
$$\cos x = \frac{5a - 2}{2 - 3a}$$

posiada rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in [0, \frac{1}{2}]$.

- 13.25 (a) Na wykresie funkcji kosinus zaznaczamy punkty x , dla których $\cos x = -\frac{1}{2}$. Nierówność $\cos x > -\frac{1}{2}$ jest zatem spełniona dla $x \in (-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



- (b) Na wykresie funkcji sinus zaznaczamy punkty x , dla których $\sin x = -\frac{1}{2}$. Nierówność $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ jest zatem spełniona dla $x \in [\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



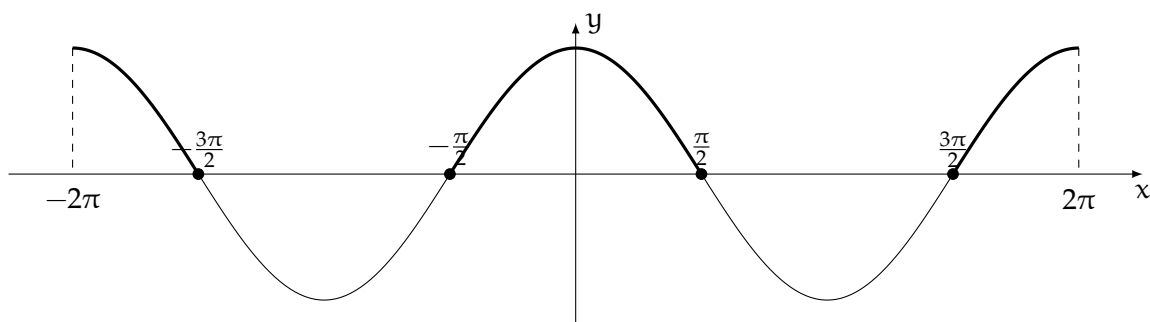
- (c) Wprowadzamy nową zmienną $t = \cos x$. Dzięki temu równanie $\cos^2 x - 5 \cos x \leq 0$ możemy sprowadzić do postaci $t^2 - 5t \leq 0$. Z wykresu wielomianu $t^2 - 5t = t(t - 5)$ odczytujemy, że nierówność ta jest spełniona dla $t \in [0, 5]$.



Wracając do pierwotnej zmiennej, otrzymujemy

$$0 \leq \cos x \leq 5.$$

Ponieważ funkcja kosinus przyjmuje wartości wyłącznie z przedziału $[-1, 1]$, prawa nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych. Rozwiązania lewej nierówności możemy odczytać z wykresu funkcji kosinus. Podsumowując, rozwiązaniami nierówności $\cos^2 x - 5 \cos x \leq 0$ są wszystkie liczby $x \in [-\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



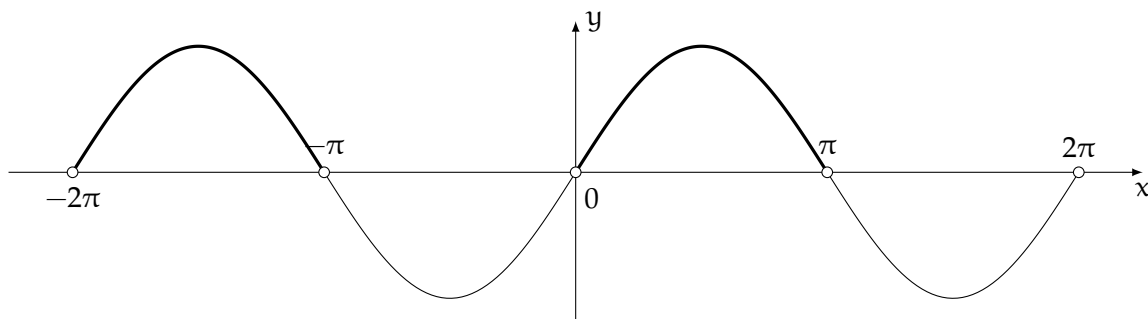
- (d) Wprowadzamy nową zmienną $t = \sin x$. Dzięki temu równanie $\sin^2 x + 2 \sin x > 0$ możemy sprowadzić do postaci $t^2 + 2t > 0$. Z wykresu wielomianu $t^2 + 2t = t(t + 2)$ odczytujemy, że nierówność ta jest spełniona dla $t \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.



Wracając do pierwotnej zmiennej, otrzymujemy

$$\sin x < -2 \quad \text{lub} \quad \sin x > 0.$$

Ponieważ funkcja sinus przyjmuje wartości wyłącznie z przedziału $[-1, 1]$, lewa nierówność nie jest spełniona dla żadnej liczby rzeczywistej. Rozwiązania prawej nierówności możemy odczytać z wykresu funkcji sinus. Podsumowując, rozwiązaniami nierówności $\sin^2 x + 2 \sin x > 0$ są wszystkie liczby $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.



- (e) Zauważmy, że

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right).$$

Ponieważ

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

dostajemy

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin x - \sin \frac{\pi}{3} \cos x \right).$$

Korzystając ze wzoru na sinus różnicy, otrzymujemy więc

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Nierówność $\sin x - \sqrt{3} \cos x \geq 0$ jest zatem równoważna nierówności

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \geq 0.$$

Z poprzedniego podpunktu wiemy, że $\sin y \geq 0$ dla wszystkich $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Oznacza to, że

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \geq 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x - \frac{\pi}{3} \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Podsumowując, nierówność $\sin x - \sqrt{3} \cos x \geq 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x takie, że

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right], \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

(f) Zauważmy, że

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right).$$

Ponieważ

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{oraz} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

dostajemy

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right).$$

Korzystając ze wzoru na sinus sumy, otrzymujemy więc

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Nierówność $\sin x + \cos x > 0$ jest zatem równoważna nierówności

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) > 0.$$

Z podpunktu (d) wiemy, że $\sin y > 0$ dla wszystkich $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Oznacza to, że

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) > 0$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x + \frac{\pi}{4} \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Podsumowując, nierówność $\sin x + \cos x > 0$ jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x takie, że

$$x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

(g) Rozważmy nierówność

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 < 0.$$

Zauważmy, że jest to trójmian kwadratowy względem zmiennej $t = \sin x$. Zastąpmy więc $\sin x$ przez t i rozważmy nierówność

$$2t^2 + 3t + 1 < 0.$$

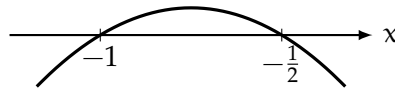
Obliczamy deltę tego trójmianu:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

oraz jego pierwiastki

$$t_1 = \frac{-3-1}{4} = -1, \quad t_2 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Z wykresu funkcji $t \mapsto 2t^2 + 3t + 1$ odczytujemy, że nierówność $2t^2 + 3t + 1 < 0$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $-1 < t < -\frac{1}{2}$.

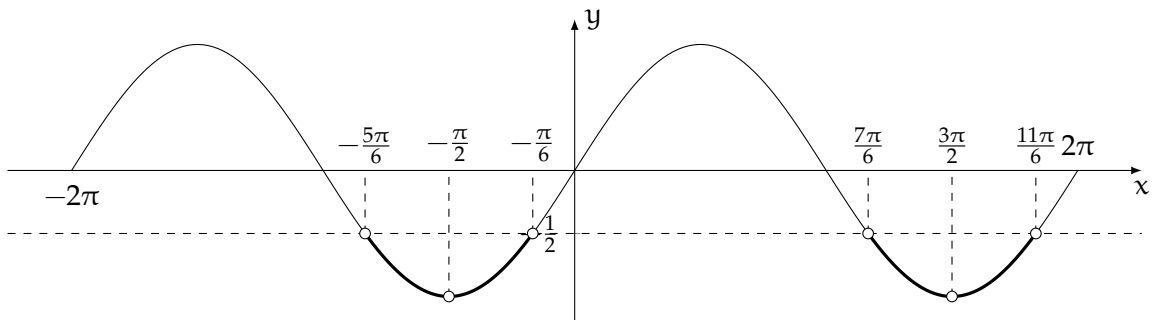


Wracamy teraz do podstawienia $t = \sin x$, co prowadzi do nierówności

$$-1 < \sin x < -\frac{1}{2},$$

równoważnej naszej wyjściowej nierówności. Na wykresie funkcji sinus zaznaczamy punkty x , dla których $\sin x = -1$ oraz $\sin x = -\frac{1}{2}$, a następnie odczytujemy, że warunek $-1 < \sin x < -\frac{1}{2}$ jest spełniony dla

$$x \in \left(\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(h) Rozważmy nierówność

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 < 0.$$

Zauważmy, że jest to trójmian kwadratowy względem zmiennej $t = \cos x$. Zastąpmy więc $\cos x$ przez t i rozważmy nierówność

$$2t^2 - 3t + 1 < 0.$$

Obliczamy deltę tego trójmianu:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

oraz jego pierwiastki

$$t_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{3+1}{4} = 1.$$

Z wykresu funkcji $t \mapsto 2t^2 - 3t + 1$ odczytujemy, że nierówność $2t^2 - 3t + 1 < 0$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{2} < t < 1$.

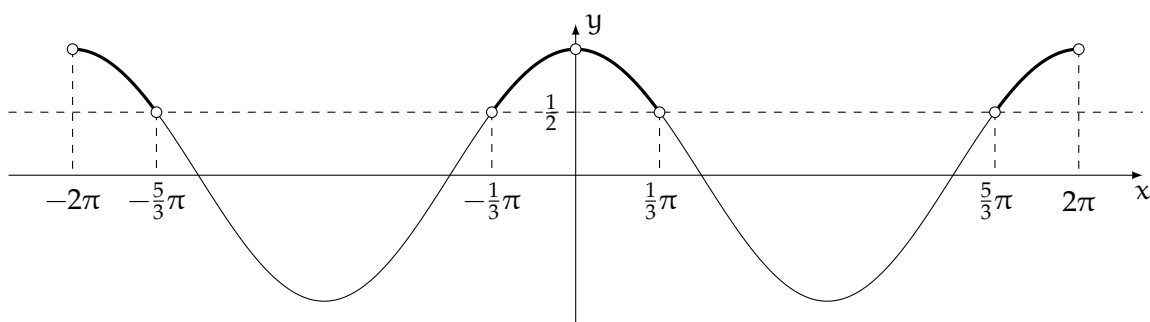


Wracamy teraz do podstawienia $t = \cos x$, co prowadzi do nierówności

$$\frac{1}{2} < \cos x < 1,$$

równoważnej naszej wyjściowej nierówności. Na wykresie funkcji kosinus zaznaczamy punkty x , dla których $\cos x = \frac{1}{2}$ oraz $\cos x = 1$, a następnie odczytujemy, że warunek $\frac{1}{2} < \cos x < 1$ jest spełniony dla

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi\right) \cup \left(2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(i) Rozważmy nierówność

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0.$$

Zauważmy, że jest to trójmian kwadratowy względem zmiennej $t = \cos x$. Zastąpmy więc $\cos x$ przez t i rozważmy nierówność

$$2t^2 + t - 1 \geq 0.$$

Obliczamy deltę tego trójmianu:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

oraz jego pierwiastki

$$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1, \quad t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Z wykresu funkcji $t \mapsto 2t^2 + t - 1$ odczytujemy, że nierówność $2t^2 + t - 1 \geq 0$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $t \leq -1$ lub $t \geq \frac{1}{2}$.



Wracamy teraz do podstawienia $t = \cos x$, dzięki czemu nasza wyjściowa nierówność sprowadza się do alternatywy

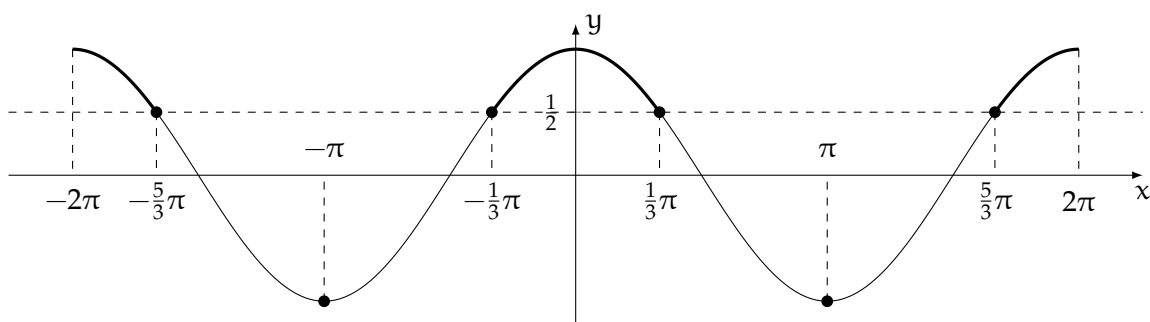
$$\cos x = -1 \quad \text{lub} \quad \cos x \geq \frac{1}{2}.$$

(Przypomnijmy, że funkcja kosinus przyjmuje wyłącznie wartości z przedziału $[-1, 1]$, dlatego zbiór rozwiązań nierówności $\cos x \leq -1$ pokrywa się ze zbiorem rozwiązań równania $\cos x = -1$.) Na wykresie funkcji kosinus zaznaczamy punkty x , dla których $\cos x = \frac{1}{2}$ oraz $\cos x = -1$, a następnie odczytujemy, że alternatywa

$$\cos x = -1 \quad \text{lub} \quad \cos x \geq \frac{1}{2}$$

jest spełniona dla

$$x = \pi + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right], \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



(j) Rozważmy nierówność

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 \geq 0.$$

Zauważmy, że jest to trójmian kwadratowy względem zmiennej $t = \sin x$. Zastąpmy więc $\sin x$ przez t i rozważmy nierówność

$$2t^2 - t - 1 \geq 0.$$

Obliczamy deltę tego trójmianu:

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

oraz jego pierwiastki

$$t_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$$

Z wykresu funkcji $t \mapsto 2t^2 - t - 1$ odczytujemy, że nierówność $2t^2 - t - 1 \geq 0$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $t \leq -\frac{1}{2}$ lub $t \geq 1$.



Wracamy teraz do podstawienia $t = \sin x$, dzięki czemu nasza wyjściowa nierówność sprowadza się do alternatywy

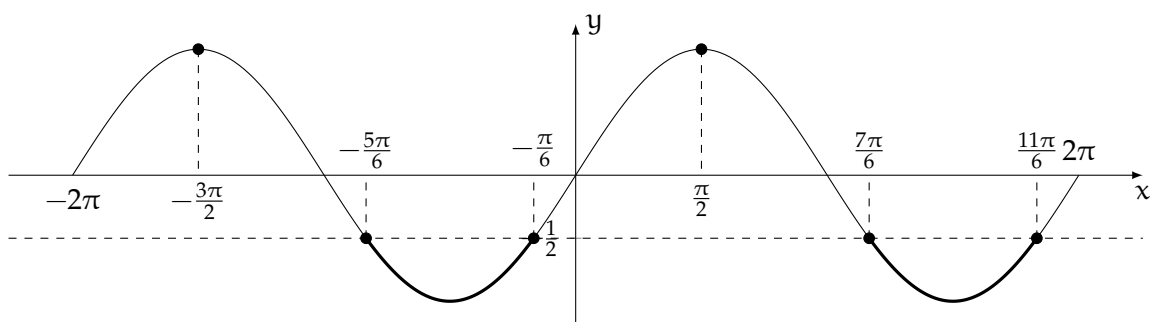
$$\sin x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \sin x = 1.$$

(Przypomnijmy, że funkcja sinus przyjmuje wyłącznie wartości z przedziału $[-1, 1]$, dlatego zbiór rozwiązań nierówności $\sin x \geq 1$ pokrywa się ze zbiorem rozwiązań równania $\sin x = 1$.) Na wykresie funkcji sinus zaznaczamy punkty x , dla których $\sin x = -\frac{1}{2}$ oraz $\sin x = 1$, a następnie odczytujemy, że alternatywa

$$\sin x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad \sin x = 1.$$

jest spełniona dla

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x \in \left[\frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \frac{11}{6}\pi + 2k\pi \right], \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



13.26 Zwróćmy uwagę, że dziedziną nierówności

$$\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$$

jest zbiór $D = (\pi, \frac{3}{2}\pi) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, bowiem dla $x = \frac{3}{2}\pi$ mamy $\cos x = 0$. Rozważymy teraz dwa przypadki w zależności od tego, czy punkty x należą do przedziału $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ czy też do przedziału $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$.

Założmy najpierw, że $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$. W tym przedziale funkcja kosinus przyjmuje wartości ujemne. Oznacza to, że dla $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ nierówność

$$\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$$

jest równoważna nierówności

$$\sin x \cos x + \cos^2 x > 1.$$

Korzystając z jedynki trygonometrycznej $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$, otrzymujemy

$$\sin x \cos x - \sin^2 x > 0$$

oraz

$$\sin x(\cos x - \sin x) > 0.$$

Zauważmy, że $\sin x < 0$ dla $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$. A zatem po podzieleniu przez $\sin x$, otrzymamy

$$\cos x - \sin x < 0.$$

Ponieważ

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right)$$

oraz

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

dostajemy

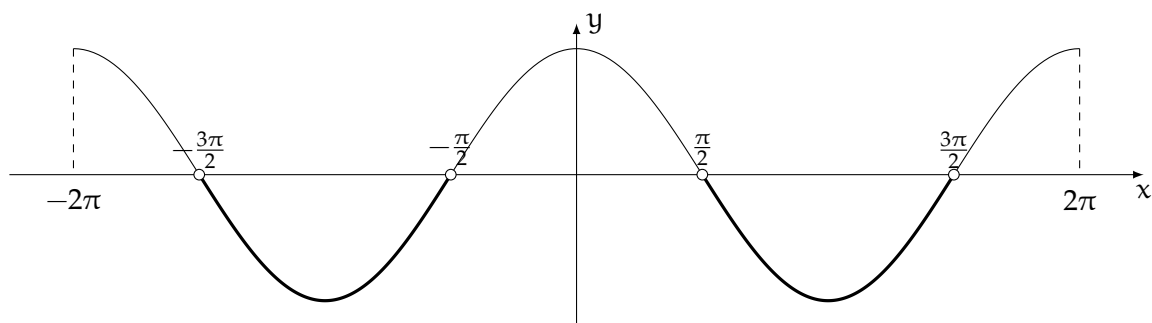
$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Zatem nierówność

$$\cos x - \sin x < 0$$

jest równoważna nierówności

$$\cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) < 0.$$



Z wykresu funkcji kosinus możemy odczytać, że jest ona spełniona przez wszystkie liczby x takie, że

$$x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Stąd

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right), \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Równoważnie powyższy warunek można zapisać jako

$$x \in \dots \cup \left(-\frac{7}{4}\pi, -\frac{3}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{9}{4}\pi, \frac{13}{4}\pi \right) \cup \dots$$

Rozwiązaniem równania

$$\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$$

w przedziale $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ jest więc zbiór

$$x \in \left(\pi, \frac{5}{4}\pi \right).$$

Założmy teraz, że $x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$. W tym przedziale funkcja kosinus przyjmuje wartości dodatnie. Oznacza to, że dla $x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$ nierówność

$$\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$$

jest równoważna nierówności

$$\sin x \cos x + \cos^2 x < 1.$$

Postępując jak poprzednio, możemy ją sprowadzić do postaci

$$\sin x (\cos x - \sin x) < 0.$$

Ponieważ $\sin x < 0$ dla $x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, po podzieleniu przez $\sin x$, otrzymamy

$$\cos x - \sin x > 0.$$

Zauważmy, że warunek ten jest spełniony przez wszystkie liczby z przedziału $(\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, bowiem w ćwiartce IV wartości dodatnie przyjmuje tylko funkcja kosinus.

Podsumowując, nierówność

$$\sin x + \cos x < \frac{1}{\cos x}$$

w przedziale $(\pi, 2\pi)$ jest spełniona przez te liczby rzeczywiste x , które spełniają warunek

$$x \in \left(\pi, \frac{5}{4}\pi \right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi \right).$$

13.27 Rozważamy nierówność

$$\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x \leq \frac{1}{4}.$$

Najpierw zauważmy, że w odjemnej i odjemniku można wyłączyć wspólny czynnik $\sin x \cos x$, co daje:

$$\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x).$$

Teraz korzystamy ze wzoru na kosinus podwojonego kąta $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, dzięki czemu powyższe wyrażenie upraszcza się do

$$\sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x = \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sin x \cos x \cos 2x.$$

Stąd nierówność

$$\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x \leq \frac{1}{4}$$

możemy zapisać w równoważnej formie

$$-4 \sin x \cos x \cos 2x \leq 1.$$

Korzystając dwukrotnie ze wzoru na sinus podwojonego kąta $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, otrzymujemy kolejno

$$-2 \sin 2x \cos 2x \leq 1$$

oraz

$$-\sin 4x \leq 1.$$

Zauważmy, że powyższa nierówność jest spełniona przez wszystkie liczby rzeczywiste x , bowiem funkcja sinus przyjmuje wartości wyłącznie z przedziału $[-1, 1]$.

Podsumowując, nierówność

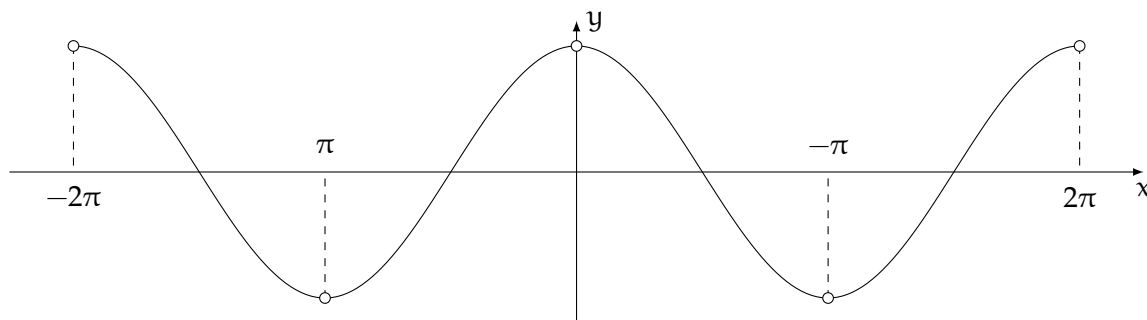
$$\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x \leq \frac{1}{4}$$

jest spełniona dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

13.28 Rozważamy nierówność

$$\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots < 1 + \cos x.$$

Zauważmy, że lewa strona to nieskończony szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $\cos^2 x$ i ilorazie $\cos x$. Jest on zbieżny (sumowalny) dokładnie wtedy, gdy $|\cos x| < 1$, tzn. wtedy gdy $x \neq k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$.



Ponieważ dla $|q| < 1$ suma szeregu $a + aq + aq^2 + \dots$ dana jest wzorem

$$\frac{a}{1-q},$$

rozważane przez nas równanie jest równoważne równaniu

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos x} < 1 + \cos x$$

dla $x \neq k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$. Zauważmy również, że $1 - \cos x > 0$ dla tak określonych wartości niewiadomej x . Zatem po przemnożeniu obu stron powyższej nierówności przez $1 - \cos x$ dostaniemy

$$\cos^2 x < (1 + \cos x)(1 - \cos x).$$

Stąd

$$\cos^2 x < 1 - \cos^2 x,$$

czyli

$$\cos^2 x < \frac{1}{2}.$$

W konsekwencji dostajemy

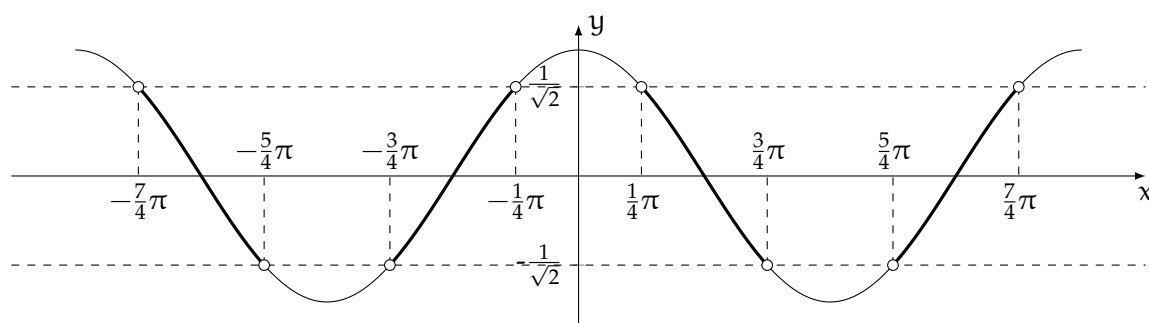
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Z wykresu funkcji kosinus odczytujemy, że rozwiązaniem tej nierówności dla $x \neq k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, a więc i nierówności

$$\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \dots < 1 + \cos x,$$

jest zbiór

$$x \in \left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right).$$



13.29 Rozważmy dwa przypadki, w zależności od znaku wyrażenia $\sin x$. Jeżeli $\sin x > 0$, czyli $x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi)$ dla $k \in \mathbb{Z}$, to równanie

$$\sin x + |\sin x| = 0$$

upraszcza się do postaci

$$\sin x + \sin x = 0.$$

Ponieważ w każdym z przedziałów $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ funkcja sinus przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie, równanie to nie ma żadnych rozwiązań.

Jeżeli natomiast $\sin x \leq 0$, czyli $x \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ dla $k \in \mathbb{Z}$, równanie

$$\sin x + |\sin x| = 0$$

przyjmuje postać

$$\sin x - \sin x = 0.$$

Oznacza to, że jest ono spełnione przez wszystkie liczby $x \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.
Zatem zbiór wszystkich rozwiązań równania

$$\sin x + |\sin x| = 0$$

można opisać wzorem

$$x \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi], \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

13.30 Na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ rozważmy nierówność

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x) - 1} > 1.$$

Zauważmy, że na tym przedziale funkcja kotangens przyjmuje wyłącznie wartości dodatnie, dzięki czemu nierówność jest poprawnie określona. Możemy ją przepisać w równoważnej postaci

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x) - 1} > \left(\frac{2}{5}\right)^0,$$

skąd wynika

$$\log_{\sqrt{3}}(\operatorname{ctg} x) - 1 < 0.$$

Korzystając z definicji logarytmu, dostajemy

$$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}.$$

Ponieważ funkcja kotangens jest malejąca na przedziale $(0, \frac{\pi}{2})$ i przyjmuje wartość $\sqrt{3}$ dla $x = \frac{\pi}{6}$, stwierdzamy, że rozwiązaniem powyższej nierówności – a więc również naszej wyjściowej nierówności – są wszystkie liczby rzeczywiste x , które spełniają warunek

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right).$$

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- E. Bańskowska, A. Cewe, D. Stankiewicz, *Egzamin wstępny na wyższe uczelnie. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 2002.
- A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 2000.
- N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1994.
- N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna, Warszawa, 1998.
- A. Dutkiewicz, A. Sikorska-Nowak, *Twierdzenie sinusów i cosinusów – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.

- T. Gronek, J. Magdziarz, *Testy z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia z komentarzami u uwagami*, Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa, 2001.
- *Funkcje trygonometryczne – materiały e-learningowe*, Poznań, 2021.
- R. J. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku: Matura 2002 - zbiór zadań, część II*, Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona Sp. z o.o., Łódź, 2001.
- P. Rzonsowski, *Funkcje trygonometryczne – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.
- P. Rzonsowski, *Równania i nierówności trygonometryczne – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.
- B. Tomasz, *Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2009.
- S. Zieleń, *Matematyka dla klasy III szkoły średniej*, Wydawnictwo NOWIK, Opole, 2001.