

# WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

### TEORIA

WARTOŚCIĄ BEZWZGLĘDNĄ liczby rzeczywistej  $x$  nazywamy liczbę  $|x|$  określoną wzorem

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jeżeli } x \geq 0, \\ -x, & \text{jeżeli } x < 0. \end{cases}$$

WŁASNOŚCI WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ. Dla dowolnych  $x, y \in \mathbb{R}$  mamy

- $|x| \geq 0$ ,
- $-|x| \leq x \leq |x|$ ,
- $|-x| = |x|$ ,
- $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,
- $|x - y| \leq |x| + |y|$ ,
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ .
- $|x : y| = |x| : |y|$ , o ile  $y \neq 0$ ,
- $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

WŁASNOŚCI WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ 2. Niech  $a \geq 0$ . Wtedy

- $|x| = a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = a$  lub  $x = -a$ ,
- $|x| \leq a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $-a \leq x \leq a$ ,
- $|x| \geq a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x \geq a$  lub  $x \leq -a$ .

UWAGA: Powyższe własności pozostają w mocy, gdy zastąpimy znaki nierówności  $\leq$  i  $\geq$  znakami  $<$  i  $>$ .

GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ. Wartość bezwzględna  $|x|$  jest odległością liczby rzeczywistej  $x$  od 0. Ogólniej,  $|x - y|$  jest odległością liczb  $x$  i  $y$  na osi liczbowej.

### ZADANIA

**Zadanie 12.1.** Rozwiąż równanie

(a)  $|x + 4| = 2$ ,

(b)  $|x - 3| = 1$ ,

(c)  $||x - 5| - 1| = 1$

(d)  $||x + 2| - 2| = 7$ ,

(e)  $2x + |5x - 1| = 13$ ,

(f)  $3x + |x + 1| = 5$ ,

$$(g) |x + 5| + |x + 13| = 8,$$

$$(h) |x - 5| + |x + 9| = 11.$$

**Zadanie 12.2.** Rozwiąż równanie  $2^{|x|} + 2^{|x-1|} = 6$ .

**Zadanie 12.3.** Dla jakich wartości parametru  $m \in \mathbb{R}$  reszta z dzielenia wielomianu  $P(x) = x^{21} + 3x + |2 - |m||$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa 4?

**Zadanie 12.4.** Rozwiąż nierówność

$$(a) |x + 3| \leq 2,$$

$$(d) x - |x - 7| \leq 7,$$

$$(b) |x - 1| > 3,$$

$$(e) |x - 4| - |x - 10| < 0,$$

$$(c) x + |3x - 4| > 20,$$

$$(f) 2|x + 2| - |x - 6| \geq 1.$$

**Zadanie 12.5.** Rozwiąż nierówność  $|x^2 - 1| > 1 - x$ .

**Zadanie 12.6.** Rozwiąż nierówność  $\sqrt{|2x - 1|} \geq 1 + x$

**Zadanie 12.7.** Rozwiąż nierówność  $\frac{3}{|x - 4|} \leq x$ .

**Zadanie 12.8.** Wyznacz największą wartość, którą na przedziale  $[-3, 2]$  przyjmuje funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = |-x^2 - 2x + 3|$ .

## ROZWIĄZANIA

**12.1.** (a) Korzystając z własności wartości bezwzględnej równanie  $|x + 4| = 2$  jest równoważne alternatywie dwóch równań

$$x + 4 = 2 \quad \text{lub} \quad x + 4 = -2.$$

Po ich rozwiązaniu otrzymujemy  $x = -2$  oraz  $x = -6$ . Zatem równanie  $|x + 4| = 2$  ma dwa rozwiązania  $x_1 = -2$  oraz  $x_2 = -6$ .

(b) Korzystając z własności wartości bezwzględnej, równanie  $|x - 3| = 1$  jest równoważne alternatywie dwóch równań:

$$x - 3 = 1 \quad \text{lub} \quad x - 3 = -1.$$

Po ich rozwiązaniu otrzymujemy  $x = 4$  oraz  $x = 2$ . Zatem równanie  $|x - 3| = 1$  ma dwa rozwiązania:  $x_1 = 4$  oraz  $x_2 = 2$ .

(c) Zauważmy, że równanie  $||x - 5| - 1| = 1$  jest równoważne alternatywie dwóch równań:

$$|x - 5| - 1 = 1 \quad \text{lub} \quad |x - 5| - 1 = -1,$$

z których każde zawiera wartość bezwzględną. Rozpatrzmy je osobno.

Równanie  $|x - 5| = 2$  zapisujemy jako alternatywę dwóch równań:

$$x - 5 = 2 \quad \text{lub} \quad x - 5 = -2.$$

Stąd otrzymujemy  $x = 7$  lub  $x = 3$ . Z kolei równanie  $|x - 5| = 0$  jest równoważne równaniu  $x - 5 = 0$ , skąd  $x = 5$ . Łącząc powyższe dwa przypadki, stwierdzamy, że równanie  $||x - 5| - 1| = 1$  posiada trzy rozwiązania:  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 5$  oraz  $x_3 = 7$ .

- (d) Zauważmy, że równanie  $||x + 2| - 2| = 7$  jest równoważne alternatywie dwóch równań:

$$|x + 2| - 2 = 7 \quad \text{lub} \quad |x + 2| - 2 = -7,$$

z których każde zawiera wartość bezwzględną. Rozpatrzmy je osobno. Równanie  $|x + 2| = 9$  zapisujemy jako alternatywę dwóch równań:

$$x + 2 = 9 \quad \text{lub} \quad x + 2 = -9.$$

Stąd otrzymujemy  $x = 7$  lub  $x = -11$ . Z kolei równanie  $|x + 2| = -5$  nie ma rozwiązania, ponieważ wartość bezwzględna nie może być liczbą ujemną. Łącząc powyższe dwa przypadki, stwierdzamy, że równanie  $||x + 2| - 2| = 7$  posiada dwa rozwiązania:  $x_1 = -11$  oraz  $x_2 = 7$ .

- (e) By rozwiązać równanie  $2x + |5x - 1| = 13$  posłużymy się definicją wartości bezwzględnej. W tym celu musimy rozpatrzeć dwa przypadki w zależności od tego jaki znak przyjmuje wyrażenie  $5x - 1$ .

PRZYPADEK I:  $5x - 1 \geq 0$ , czyli  $x \in [\frac{1}{5}, +\infty)$ . Wówczas  $|5x - 1| = 5x - 1$  i nasze równanie przyjmuje postać:

$$2x + (5x - 1) = 13.$$

Upraszczając otrzymujemy  $7x = 14$ , skąd  $x = 2$ . Ponieważ  $2 \in [\frac{1}{5}, +\infty)$  rozwiązaniem równania  $2x + |5x - 1| = 13$  w tym przypadku jest  $x_1 = 2$ .

PRZYPADEK II:  $5x - 1 < 0$ , czyli  $x \in (-\infty, \frac{1}{5})$ . Wówczas  $|5x - 1| = -(5x - 1) = -5x + 1$ , a więc rozważane równanie ma postać:

$$2x + (-5x + 1) = 13.$$

Po uproszczeniu dostajemy  $-3x = 13$ , skąd  $x = -4$ . Ponieważ  $-4 \in (-\infty, \frac{1}{5})$ , liczba  $x_2 = -4$  jest rozwiązaniem równania  $2x + |5x - 1| = 13$ .

Ostatecznie równanie  $2x + |5x - 1| = 13$  ma dwa rozwiązania  $x_1 = 2$  oraz  $x_2 = -4$ .

- (f) By rozwiązać równanie  $3x + |x + 1| = 5$ , posłużymy się definicją wartości bezwzględnej. W tym celu rozpatrzmy dwa przypadki, w zależności od znaku wyrażenia  $x + 1$ .

PRZYPADEK I:  $x + 1 \geq 0$ , czyli  $x \in [-1, +\infty)$ . Wówczas  $|x + 1| = x + 1$  i nasze równanie przyjmuje postać:

$$3x + (x + 1) = 5.$$

Upraszczając, otrzymujemy  $4x = 4$ , skąd  $x = 1$ . Ponieważ  $1 \in [-1, +\infty)$ , rozwiązaniem równania  $3x + |x + 1| = 5$  w tym przypadku jest  $x_1 = 1$ .

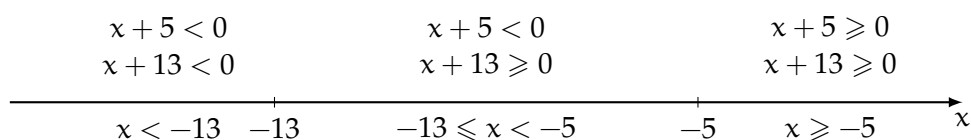
PRZYPADEK II:  $x + 1 < 0$ , czyli  $x \in (-\infty, -1)$ . Wówczas  $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1$ , a więc rozważane równanie ma postać:

$$3x + (-x - 1) = 5.$$

Po uproszczeniu dostajemy  $2x = 6$ , skąd  $x = 3$ . Ponieważ  $3 \notin (-\infty, -1)$ , stwierdzamy, że w tym przypadku równanie  $3x + |x + 1| = 5$  nie posiada rozwiązań.

Ostatecznie równanie  $3x + |x + 1| = 5$  ma jedno rozwiązanie:  $x_1 = 1$ .

- (g) Aby rozwiązać równanie  $|x + 5| + |x + 13| = 8$ , rozpatrzmy przypadki w zależności od znaków wyrażeń  $x + 5$  oraz  $x + 13$ . Zauważmy, że zmiana znaku tych wyrażeń zachodzi odpowiednio w punktach  $x = -5$  oraz  $x = -13$ . Na osi liczbowej wygląda to następująco:



PRZYPADK I:  $x < -13$ . Wówczas

$$|x + 5| + |x + 13| = -(x + 5) - (x + 13) = -2x - 18.$$

Nasze równanie przyjmuje więc postać  $-2x - 18 = 8$ , skąd  $x = -13$ . Ponieważ  $x = -13$  nie należy do przedziału  $(-\infty, -13)$ , stwierdzamy, że w rozważanym przedziale równanie  $|x + 5| + |x + 13| = 8$  nie posiada rozwiązań.

PRZYPADK II:  $-13 \leq x < -5$ . Wówczas

$$|x + 5| + |x + 13| = -(x + 5) + (x + 13) = 8.$$

Otrzymujemy więc tożsamość  $8 = 8$ . Oznacza to, że każda liczba  $x \in [-13, -5)$  jest rozwiązaniem równania  $|x + 5| + |x + 13| = 8$ .

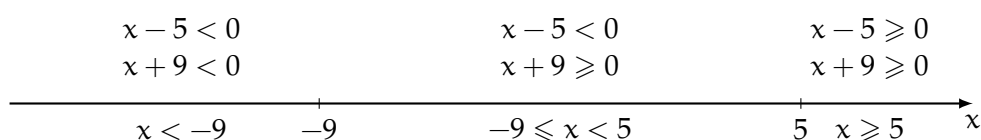
PRZYPADK III:  $x \geq -5$ . Wtedy

$$|x + 5| + |x + 13| = (x + 5) + (x + 13) = 2x + 18.$$

Nasze równanie przyjmuje więc postać  $2x + 18 = 8$ , skąd  $x = -5$ . Ponieważ  $-5 \in [-5, +\infty)$ , rozwiązaniem równania  $|x + 5| + |x + 13| = 8$  w tym przypadku jest  $x = -5$ .

Ostatecznie rozwiązaniem równania  $|x + 5| + |x + 13| = 8$  jest dowolna liczba  $x$  z przedziału  $[-13, -5]$ .

- (h) Aby rozwiązać równanie  $|x - 5| + |x + 9| = 11$ , rozpatrzmy przypadki w zależności od znaków wyrażeń  $x - 5$  oraz  $x + 9$ . Zauważmy, że zmiana znaku tych wyrażeń zachodzi odpowiednio w punktach  $x = 5$  oraz  $x = -9$ . Na osi liczbowej wygląda to następująco:



PRZYPADK I:  $x < -9$ . Wówczas

$$|x - 5| + |x + 9| = -(x - 5) - (x + 9) = -2x - 4.$$

Nasze równanie przyjmuje więc postać  $-2x - 4 = 11$ , skąd  $-2x = 15$ , czyli  $x = -\frac{15}{2}$ . Ponieważ  $-\frac{15}{2} \notin (-\infty, -9)$ , w tym przedziale równanie nie ma rozwiązań.

PRZYPADK II:  $-9 \leq x < 5$ . Wówczas

$$|x - 5| + |x + 9| = -(x - 5) + (x + 9) = -x + 5 + x + 9 = 14.$$

Ponieważ  $14 \neq 11$ , równanie w tym przedziale również nie posiada rozwiązań.

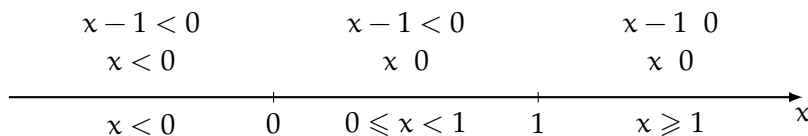
PRZYPADK III:  $x \geq 5$ . Wtedy

$$|x - 5| + |x + 9| = (x - 5) + (x + 9) = 2x + 4.$$

Równanie przyjmuje postać  $2x + 4 = 11$ , skąd  $2x = 7$ , czyli  $x = \frac{7}{2}$ . Ponieważ  $\frac{7}{2} \notin [5, +\infty)$ , i w tym przedziale równanie nie ma rozwiązań.

Ostatecznie równanie  $|x - 5| + |x + 9| = 11$  nie posiada rozwiązań.

**12.2.** Aby rozwiązać równanie  $2^{|x|} + 2^{|x-1|} = 6$ , rozpatrzmy przypadki w zależności od znaków wyrażeń  $x$  oraz  $x - 1$ . Zauważmy, że zmiana znaku tych wyrażeń zachodzi w punktach  $x = 0$  oraz  $x = 1$ . Na osi liczbowej wygląda to następująco:



PRZYPADEK I:  $x < 0$ . Wówczas  $|x| = -x$  oraz

$$|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1.$$

Rozważane równanie przyjmuje postać

$$2^{-x} + 2^{-x+1} = 6,$$

skąd

$$2^{-x}(1 + 2) = 6,$$

czyli  $2^{-x} = 2$ . Stąd  $x = -1$ . Ponieważ  $-1 < 0$ , rozwiązaniem równania

$$2^{|x|} + 2^{|x-1|} = 6$$

w tym przypadku jest  $x = -1$ .

PRZYPADEK II:  $0 \leq x < 1$ . W tym przedziale  $|x| = x$  oraz

$$|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1.$$

Nasze równanie przyjmuje więc postać

$$2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 6.$$

Wprowadzamy podstawienie  $t = 2^x$ , skąd  $2^{-x} = \frac{1}{t}$ . Powyższe równanie można zatem zapisać jako

$$t + \frac{2}{t} = 6.$$

Mnożąc obustronnie przez  $t > 0$ , dostajemy równoważne równanie kwadratowe

$$t^2 - 6t + 2 = 0.$$

Z uwagi na ograniczenie  $x \in [0, 1)$ , interesują nas wyłącznie rozwiązania  $t \in [2^0, 2^1) = [1, 2)$ . Obliczamy wyróżnik  $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 36 - 8 = 28$ . Stąd  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ . Wówczas

$$t = \frac{6 + 2\sqrt{7}}{2} = 3 + \sqrt{7} \quad \text{oraz} \quad t = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{2} = 3 - \sqrt{7}.$$

Zauważmy, że  $2 = \sqrt{4} < \sqrt{7}$ . Stąd

$$3 + \sqrt{7} > 3 + 2 = 5 > 2$$

oraz

$$3 - \sqrt{7} < 3 - 2 = 1$$

Zatem żadne z rozwiązań równania kwadratowego  $t^2 - 6t + 2 = 0$  nie leży w przedziale  $[1, 2)$ .  
A zatem w tym przypadku wyjściowe równanie

$$2^{|x|} + 2^{|x-1|} = 6$$

nie ma rozwiązań.

PRZYPADEK III:  $x \geq 1$ . Wówczas  $|x| = x$  oraz  $|x-1| = x-1$ . Nasze równanie przyjmuje więc postać

$$2^x + 2^{x-1} = 6,$$

skąd

$$2^x + \frac{2^x}{2} = 6,$$

czyli  $2^x = 4$ . Stąd  $x = 2$ . Ponieważ  $2 \geq 1$ , rozwiązaniem równania

$$2^{|x|} + 2^{|x-1|} = 6$$

w tym przypadku jest  $x = 2$ .

Ostatecznie równanie

$$2^{|x|} + 2^{|x-1|} = 6$$

ma dwa rozwiązania:  $x_1 = -1$  oraz  $x_2 = 2$ .

- 12.3.** Przypomnijmy, że reszta z dzielenia wielomianu  $P$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa wartości wielomianu  $P$  w punkcie  $-1$ , czyli  $P(-1)$ . Aby reszta ta wynosiła 4, musi zachodzić równość  $P(-1) = 4$ , co prowadzi do równani

$$(-1)^{21} + 3 \cdot (-1) + |2 - |m|| = 4.$$

Upraszczając, otrzymujemy

$$|2 - |m|| = 8.$$

Równanie to jest równoważne alternatywie dwóch równań

$$2 - |m| = 8 \quad \text{lub} \quad 2 - |m| = -8.$$

Stąd

$$|m| = -6 \quad \text{lub} \quad |m| = 10.$$

Zwróćmy uwagę, że pierwsze z nich nie ma rozwiązań, bowiem wartość bezwzględna przyjmuje wyłącznie wartości nieujemne. Rozwiązaniami drugiego z nich są liczby  $m_1 = 10$  oraz  $m_2 = -10$ . Oznacza to, że reszta z dzielenia wielomianu  $P$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa 4 wtedy i tylko wtedy, gdy  $m = 10$  lub  $m = -10$ .

- 12.4.** (a) Korzystając z własności wartości bezwzględnej nierówność  $|x + 3| \leq 2$  jest równoważna nierówności

$$-2 \leq x + 3 \leq 2.$$

Odejmując od wszystkich stron 3, dostajemy

$$-5 \leq x \leq -1.$$

Oznacza to, że rozwiązaniem nierówności  $|x + 3| \leq 2$  są liczby rzeczywiste  $x$  spełniające warunek  $x \in [-5, -1]$ .

- (b) Korzystając z własności wartości bezwzględnej nierówność  $|x - 1| > 3$  jest równoważna alternatywie dwóch nierówności

$$x - 1 > 3 \quad \text{oraz} \quad x - 1 < -3.$$

Oznacza to, że rozwiązaniem nierówności  $|x - 1| > 3$  są liczby rzeczywiste  $x$  spełniające warunek  $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$ .

- (c) By rozwiązać nierówność  $x + |3x - 4| > 20$  posłużymy się definicją wartości bezwzględnej. W tym celu musimy rozpatrzeć dwa przypadki w zależności od tego jaki znak przyjmuje wyrażenie  $3x - 4$ .

PRZYPADEK I:  $3x - 4 \geq 0$ , czyli  $x \in [\frac{4}{3}, +\infty)$ . Wówczas  $|3x - 4| = 3x - 4$  i nasza nierówność przyjmuje postać:

$$x + (3x - 4) > 20.$$

Upraszczając otrzymujemy  $4x > 24$ , skąd  $x > 6$ . Zatem rozwiązaniem nierówności  $x + |3x - 4| > 20$  w tym przypadku jest część wspólna zbiorów  $(6, +\infty)$  oraz  $[\frac{4}{3}, +\infty)$ , czyli  $x \in (6, +\infty)$ .

PRZYPADEK II:  $3x - 4 < 0$ , czyli  $x \in (-\infty, \frac{4}{3})$ . Wówczas

$$|3x - 4| = -(3x - 4) = -3x + 4,$$

a więc rozważana nierówność ma postać:

$$x + (-3x + 4) > 20.$$

Po uproszczeniu dostajemy  $-2x > 16$ , skąd  $x < -8$ . Zatem rozwiązaniem nierówności  $x + |3x - 4| > 20$  w tym przypadku jest część wspólna zbiorów  $(-\infty, -8)$  oraz  $(-\infty, \frac{4}{3})$ , czyli  $x \in (-\infty, -8)$ .

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności  $x + |3x - 4| > 20$  jest zbiór liczb rzeczywistych  $x$ , które spełniają warunek

$$x \in (-\infty, -8) \cup (6, +\infty).$$

- (d) By rozwiązać nierówność  $x - |x - 7| \leq 7$  posłużymy się definicją wartości bezwzględnej. W tym celu musimy rozpatrzeć dwa przypadki w zależności od tego jaki znak przyjmuje wyrażenie  $x - 7$ .

PRZYPADEK I:  $x - 7 \geq 0$ , czyli  $x \in [7, +\infty)$ . Wówczas  $|x - 7| = x - 7$  i nasza nierówność przyjmuje postać:

$$x - (x - 7) \leq 7.$$

Upraszczając otrzymujemy  $7 \leq 7$ , co jest prawdą dla każdego  $x$ . Zatem rozwiązaniem nierówności  $x - |x - 7| \leq 7$  w tym przypadku jest część wspólna zbiorów  $[7, +\infty)$  oraz  $\mathbb{R}$ , czyli  $x \in [7, +\infty)$ .

PRZYPADEK II:  $x - 7 < 0$ , czyli  $x \in (-\infty, 7)$ . Wówczas

$$|x - 7| = -(x - 7) = -x + 7,$$

a więc rozważana nierówność ma postać:

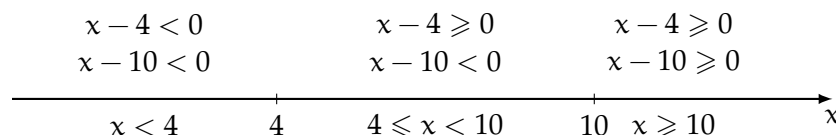
$$x - (-x + 7) \leq 7.$$

Po uproszczeniu dostajemy  $2x \leq 14$ , skąd  $x \leq 7$ . Zatem rozwiązaniem nierówności  $x - |x - 7| \leq 7$  w tym przypadku jest część wspólna zbiorów  $(-\infty, 7)$  oraz  $(-\infty, 7]$ , czyli  $x \in (-\infty, 7)$ .

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności  $x - |x - 7| \leq 7$  jest zbiór liczb rzeczywistych  $x$ , które spełniają warunek

$$x \in (-\infty, 7) \cup [7, +\infty) = \mathbb{R}.$$

- (e) Aby rozwiązać nierówność  $|x - 4| - |x - 10| < 0$ , rozpatrzmy przypadki w zależności od znaków wyrażeń  $x - 4$  oraz  $x - 10$ . Zauważmy, że zmiana znaku tych wyrażeń zachodzi odpowiednio w punktach  $x = 4$  oraz  $x = 10$ . Na osi liczbowej wygląda to następująco:



PRZYPADEK I:  $x < 4$ . Wówczas

$$|x - 4| - |x - 10| = -(x - 4) - [-(x - 10)] = -x + 4 + x - 10 = -6.$$

Otrzymujemy  $-6 < 0$ , co jest prawdą dla każdego  $x$ . Zatem rozwiązaniem nierówności  $|x - 4| - |x - 10| < 0$  w tym przypadku jest zbiór  $x \in (-\infty, 4)$ .

PRZYPADEK II:  $4 \leq x < 10$ . Wówczas

$$|x - 4| - |x - 10| = (x - 4) - [-(x - 10)] = (x - 4) + (x - 10) = 2x - 14.$$

Otrzymujemy nierówność  $2x - 14 < 0$ , skąd  $x < 7$ . Zatem rozwiązaniem w tym przypadku jest część wspólna zbiorów  $[4, 10)$  oraz  $(-\infty, 7)$ , czyli  $x \in [4, 7)$ .

PRZYPADEK III:  $x \geq 10$ . Wtedy

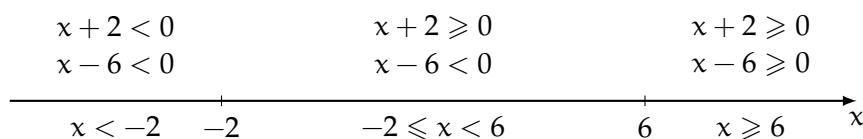
$$|x - 4| - |x - 10| = (x - 4) - (x - 10) = 6.$$

Otrzymujemy  $6 < 0$ , co jest fałszem dla każdego  $x$ . Zatem w tym przedziale nierówność  $|x - 4| - |x - 10| < 0$  nie ma rozwiązań.

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności  $|x - 4| - |x - 10| < 0$  jest zbiór liczb rzeczywistych

$$x \in (-\infty, 4) \cup [4, 7) \cup \emptyset = (-\infty, 7).$$

- (f) Aby rozwiązać nierówność  $2|x + 2| - |x - 6| \geq 1$ , rozpatrzmy przypadki w zależności od znaków wyrażeń  $x + 2$  oraz  $x - 6$ . Zauważmy, że zmiana znaku tych wyrażeń zachodzi odpowiednio w punktach  $x = -2$  oraz  $x = 6$ . Na osi liczbowej wygląda to następująco:



PRZYPADEK I:  $x < -2$ . Wówczas

$$2|x + 2| - |x - 6| = 2(-x - 2) - [-(x - 6)] = -2x - 4 + x - 6 = -x - 10.$$

Nierówność przyjmuje postać  $-x \geq 11$ , skąd  $x \leq -11$ . Zatem rozwiązaniem w tym przypadku jest część wspólna zbiorów  $(-\infty, -11]$  oraz  $(-\infty, -2)$ , czyli  $x \in (-\infty, -11]$ .

PRZYPADEK II:  $-2 \leq x < 6$ . Wówczas

$$2|x+2| - |x-6| = 2(x+2) - [-(x-6)] = 2x+4+x-6 = 3x-2.$$

Otrzymujemy nierówność  $3x \geq 3$ , skąd  $x \geq 1$ . Zatem rozwiązaniem w tym przypadku jest część wspólna zbiorów  $[1, +\infty)$  oraz  $[-2, 6)$ , czyli  $x \in [1, 6)$ .

PRZYPADEK III:  $x \geq 6$ . Wtedy

$$2|x+2| - |x-6| = 2(x+2) - (x-6) = 2x+4-x+6 = x+10.$$

Otrzymujemy nierówność  $x+10 \geq 1$ , czyli  $x \geq -9$ . Zatem rozwiązaniem w tym przypadku jest część wspólna zbiorów  $[6, +\infty)$  oraz  $[-9, +\infty)$ , czyli  $x \in [6, +\infty)$ .

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności  $2|x+2| - |x-6| \geq 1$  jest zbiór liczb rzeczywistych

$$x \in (-\infty, -11] \cup [1, 6) \cup [6, +\infty) = (-\infty, -11] \cup [1, +\infty).$$

## 12.5. Naszym celem jest rozwiązanie nierówności

$$|x^2 - 1| > 1 - x$$

Zauważmy, że  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ . Na podstawie wykresu możemy łatwo odczytać, że  $x^2 - 1 \geq 0$  dla  $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$  oraz  $x^2 - 1 < 0$  dla  $x \in (-1, 1)$ .



PRZYPADEK I:  $x^2 - 1 \geq 0$ , czyli  $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ . Wówczas  $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ , a rozważana nierówność przyjmuje postać:

$$x^2 - 1 > 1 - x.$$

Przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę, otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$x^2 + x - 2 > 0.$$

Obliczamy wyróżnik wielomianu  $x^2 + x - 2$ :

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$$

oraz jego pierwiastki

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad x = \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej widzimy, że rozwiązaniem nierówności  $x^2 + x - 2 > 0$  jest zbiór  $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ .



Zatem rozwiązaniem wyjściowej nierówności  $|x^2 - 1| > 1 - x$  w tym przypadku jest część wspólna przedziałów  $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$  oraz  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ , czyli

$$x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty).$$

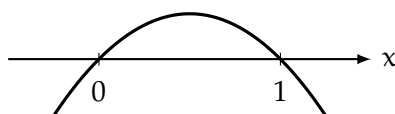
PRZYPADEK II:  $x^2 - 1 < 0$ , czyli  $x \in (-1, 1)$ . Wówczas  $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$ , a rozważana nierówność przyjmuje postać:

$$-x^2 + 1 > 1 - x,$$

Przenosząc wszystkie wyrazy na lewą stronę, otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$-x^2 + x > 0,$$

która jest równoważna nierówności  $-x(x - 1) > 0$ . Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej widzimy, że rozwiązaniem nierówności  $-x^2 + x > 0$  jest zbiór  $x \in (0, 1)$ .



Zatem rozwiązaniem wyjściowej nierówności  $|x^2 - 1| > 1 - x$  w tym przypadku jest część wspólna przedziałów  $(-1, 1)$  oraz  $(0, 1)$ , czyli

$$x \in (0, 1).$$

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności  $|x^2 - 1| > 1 - x$  jest zbiór liczb rzeczywistych

$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

**12.6.** Aby rozwiązać nierówność  $\sqrt{2x - 1} \geq 1 + x$ , rozpatrzmy dwa przypadki w zależności od znaku wyrażenia  $2x - 1$ .

PRZYPADEK I:  $2x - 1 \geq 0$ , czyli  $x \geq \frac{1}{2}$ . Wówczas  $|2x - 1| = 2x - 1$  i wyjściowa nierówność przyjmuje postać:

$$\sqrt{2x - 1} \geq 1 + x.$$

Podnosząc obie strony do kwadratu (pamiętając, że dla  $x \geq \frac{1}{2}$  obie strony są nieujemne), otrzymujemy:

$$2x - 1 \geq (1 + x)^2.$$

Po rozwinięciu prawej strony:

$$2x - 1 \geq x^2 + 2x + 1,$$

czyli

$$x^2 + 2 \leq 0.$$

Nierówność ta nie ma rozwiązań rzeczywistych. Oznacza to, że w tym przypadku wyjściowa nierówność  $\sqrt{2x - 1} \geq 1 + x$  nie posiada rozwiązań.

PRZYPADEK II:  $2x - 1 < 0$ , czyli  $x < \frac{1}{2}$ . Wówczas  $|2x - 1| = -(2x - 1) = 1 - 2x$  i wyjściowa nierówność przyjmuje postać:

$$\sqrt{1 - 2x} \geq 1 + x.$$

Zwróćmy uwagę, że dla  $x < -1$  prawa strona tej nierówności jest ujemna, natomiast lewa jest zawsze nieujemna (z definicji pierwiastka). Oznacza to, że każda liczba  $x < -1$  spełnia nierówność.

Skupmy się więc na liczbach  $x$  z przedziału  $[-1, \frac{1}{2})$ . Podnosząc obie strony nierówności

$$\sqrt{1-2x} \geq 1+x$$

do kwadratu, otrzymujemy

$$1-2x \geq (1+x)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Stąd

$$x^2 + 4x \leq 0.$$

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej  $x(x+4)$  odczytujemy, że rozwiązaniem nierówności  $x^2 + 4x \leq 0$  jest zbiór  $x \in [-4, 0]$ .



Zatem rozwiązaniem nierówności  $\sqrt{1-2x} \geq 1+x$  w przedziale  $[-1, \frac{1}{2})$  jest część wspólna zbiorów  $[-4, 0]$  oraz  $[-1, \frac{1}{2})$ , czyli  $[-1, 0]$ .

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności  $\sqrt{1-2x} \geq 1+x$  jest zbiór liczb rzeczywistych

$$x \in (-\infty, -1) \cup [-1, 0] = (-\infty, 0].$$

**12.7.** Zauważmy, że dziedzina nierówności

$$\frac{3}{|x-4|} \leq x$$

jest zbiór  $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ . Nierówność tę można przekształcić do postaci równoważnej

$$3 \leq x|x-4|,$$

ponieważ wartość bezwzględna przyjmuje jedynie wartości nieujemne, więc przemnożenie obu stron przez  $|x-4|$  nie zmienia kierunku nierówności. Rozważmy dwa przypadki.

**PRZYPADEK I:**  $x-4 > 0$ , czyli  $x > 4$ . (Nie możemy rozważać warunku  $x \geq 4$ , ponieważ  $x = 4$  nie należy do dziedziny nierówności.) Wówczas  $|x-4| = x-4$ , a wyjściowa nierówność przyjmuje postać:

$$3 \leq x(x-4),$$

skąd

$$x^2 - 4x - 3 \geq 0.$$

Obliczamy wyróżnik wielomianu  $x^2 - 4x - 3$ :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 + 12 = 28 = 4 \cdot 7$$

oraz jego pierwiastki

$$x = \frac{4+2\sqrt{7}}{2} = 2 + \sqrt{7}, \quad x = \frac{4-2\sqrt{7}}{2} = 2 - \sqrt{7}.$$

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej widzimy, że rozwiązaniem nierówności  $x^2 - 4x - 3 \geq 0$  jest zbiór  $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}, +\infty)$ .



Zatem rozwiązaniem nierówności  $3 \leq x|x-4|$  w przedziale  $(4, +\infty)$  jest część wspólna zbiorów  $(4, +\infty)$  oraz  $(-\infty, 2 - \sqrt{7}) \cup (2 + \sqrt{7}, +\infty)$ , czyli  $(2 + \sqrt{7}, +\infty)$ .

PRZYPADEK II:  $x - 4 < 0$ , czyli  $x < 4$ . Wówczas  $|x - 4| = 4 - x$ , a wyjściowa nierówność przyjmuje postać:

$$3 \leq x(4 - x),$$

skąd

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0.$$

Obliczamy wyróżnik wielomianu  $x^2 - 4x + 3$ :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

oraz pierwiastki:

$$x = \frac{4 + 2}{2} = 3, \quad x = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

Na podstawie wykresu funkcji kwadratowej widzimy, że rozwiązaniem nierówności  $x^2 - 4x + 3 \leq 0$  jest zbiór  $x \in [1, 3]$ .



Zatem rozwiązaniem nierówności  $3 \leq x|x-4|$  w przedziale  $(-\infty, 4)$  jest część wspólna zbiorów  $(-\infty, 4)$  oraz  $[1, 3]$ , czyli

$$x \in [1, 3].$$

Ostatecznie rozwiązaniem nierówności  $3 \leq x|x-4|$  jest zbiór liczb rzeczywistych

$$x \in [1, 3] \cup [2 + \sqrt{7}, +\infty).$$

**12.8.** Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego  $-x^2 - 2x + 3$ :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$$

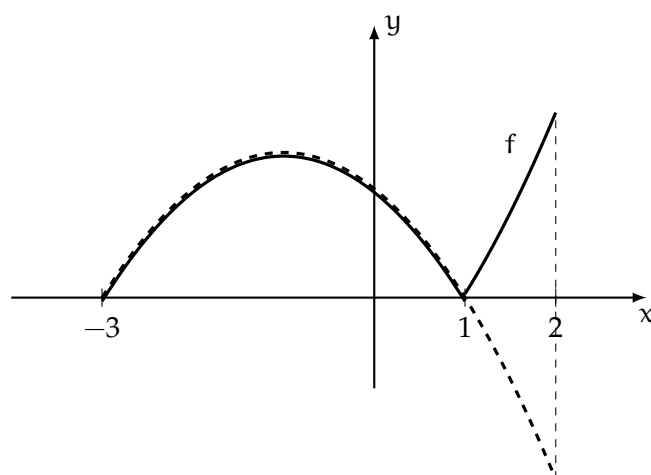
oraz jego pierwiastki

$$x = \frac{2 + 4}{-2} = -3, \quad x = \frac{2 - 4}{-2} = 1.$$

Dzięki temu możemy zapisać trójmian kwadratowy  $-x^2 - 2x + 3$  w postaci iloczynowej

$$-(x + 3)(x - 1)$$

i narysować jego wykres na przedziale  $[-3, 2]$ , a także wykres funkcji  $f$ .



Z wykresu odczytujemy, że funkcja  $f$  w przedziale  $[-3, 2]$  przyjmuje wartość największą w punkcie  $x = 2$ . Wartość ta wynosi

$$f(2) = |-2^2 - 2 \cdot 2 + 3| = |-4 - 4 + 3| = |-5| = 5.$$

(Z łatwością można również sprawdzić, że rzędna wierzchołka paraboli  $-x^2 - 2x + 3$  jest równa

$$q = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{-2} = 4,$$

co jest mniejsze niż wartość funkcji  $f$  w punkcie  $x = 2$ , czyli  $f(2) = 5$ .)

## LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- E. Bańkowska, A. Cewe, D. Stankiewicz, *Egzamin wstępny na wyższe uczelnie. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 2002.
- A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 2000.
- T. Gronek, J. Magdziarz, *Testy z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia z komentarzami u uwagami*, Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa, 2001.
- *Równania i nierówności z wartością bezwzględną – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.