Rozdział 11

Funkcje wykładnicze i logarytmiczne

Teoria

Definicja potęgi. Potęgowanie jest działaniem będącym uogólnieniem działania mnożenia. Potęgowany element nazwa się *podstawą*, a liczba czynników w mnożeniu nosi nazwę *wykładnika*. Na przykład $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; podstawą jest 2, a wykładnikiem 5. Okazuje się, że formalne zdefiniowanie potęgi wcale nie jest takie łatwe i należy postępować następująco.

- *Potęga o wykładniku naturalnym*: jeśli $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to n*-tą potęgę liczby* a określamy rekurencyjnie wzorami: $a^1 = a$ oraz $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

- *Potęga o wykładniku zerowym*: dla każdej liczby rzeczywistej $a \neq 0$ przyjmujemy $a^0 = 1$.

  Uwaga: Wyrażenie 0^0 jest tzw. *symbolem nieoznaczonym* i, jak wskazuje nazwa, nie ma jednoznacznie określonej wartości. Warto jednak dodać, że np. w teorii szeregów potęgowych przyjmuje się z definicji $0^0 = 1$. Dzieje się tak, gdyż pochodną szeregu $x+x^2+x^3+x^4+\ldots$ jest $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$, co w zapisie za pomocą symbolu $\sum$ można przedstawić w postaci $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)$. Dla $x = 0$ i $n = 1$ wyrażenie nx^{n-1}, występujące w szeregu po prawej stronie, jest równe 0^0, ale jak widzimy z powyższych rozwinięć musi być ono równe 1.

- *Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym*: jeśli $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

- *Potęga o wykładniku wymiernym postaci* $\frac{1}{n}$. Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą nieujemną oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Liczbę $a^{\frac{1}{n}}$ definiujemy jako taką nieujemną liczbę b, że $b^n = a$. Liczbę b nazywamy również *pierwiastkiem* n*-tego stopnia* z liczby a i piszemy $b = \sqrt[n]{a}$.

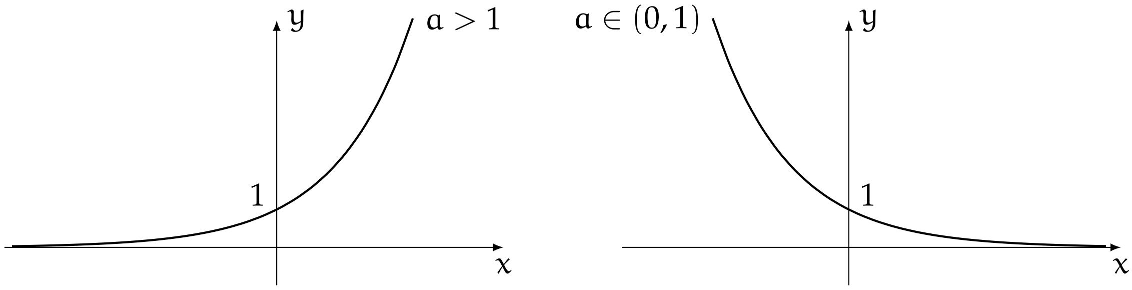
- *Potęga o wykładniku wymiernym postaci* $\frac{k}{n}$. Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią oraz niech $q \in \mathbb{Q}$ jest postaci $q = \frac{k}{n}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $a^q = a^{\frac{k}{n}} = (a^k)^{\frac{1}{n}}$.

- *Potęga o wykładniku rzeczywistym*. Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią i różną od 1 oraz niech $x \in \mathbb{R}$. *Potęgą liczby* a *o wykładniku* x, tj. a^x, nazywamy liczbę b, która dla dowolnych liczb wymiernych p, q takich, że $p < x < q$ spełnia warunek: $a^p < b < a^q$, gdy $a > 1$, oraz $a^q < b < a^p$, gdy $0 < a < 1$. W przypadku, gdy $a = 1$, przyjmujemy $a^x = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Własności działań na potęgach. Dla dowolnych $a, b \in (0, +\infty)$ oraz dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
- $a^x : a^y = a^{x-y}$,
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$,
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ daną wzorem $f(x) = a^x$, gdzie $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ jest ustaloną liczbą rzeczywistą.



Własności funkcji wykładniczej. Dla każdej wartości podstawy $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ funkcja wykładnicza $x \mapsto a^x$ jest bijekcją zbioru $\mathbb{R}$ na $(0, +\infty)$. Ponadto, gdy $a > 1$, to funkcja ta jest rosnąca, a gdy $a \in (0, 1)$, to jest malejąca.

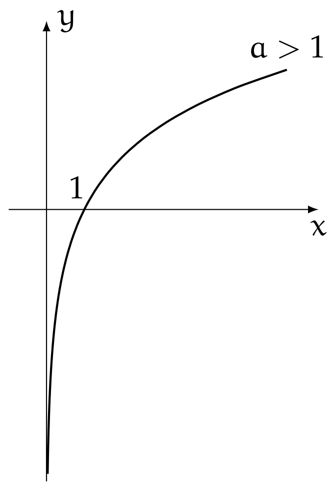
Definicja logarytmu. Niech a oraz b będą dodatnimi liczbami oraz niech $a \neq 1$. *Logarytmem* z liczby b przy podstawie a nazywamy liczbę c spełniającą równanie $a^c = b$; piszemy wtedy $c = \log_a b$.

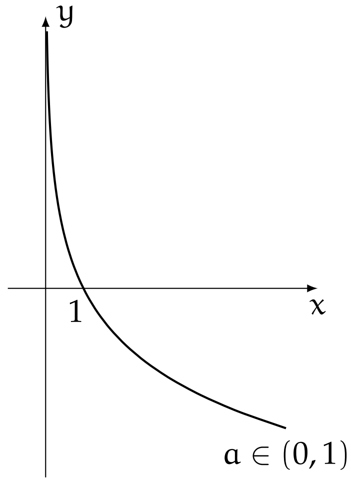
Logarytm dziesiętny i naturalny. *Logarytmem dziesiętnym* nazywamy logarytm o podstawie 10, tj. $\log_{10} a$. Często logarytm taki oznaczamy symbolem $\log a$ (bez pisania podstawy). *Logarytmem naturalnym* nazywamy logarytm o podstawie e, tj. $\log_e a$. Liczba niewymierna e jest, obok π, jedną z najbardziej znanych stałych matematycznych i wynosi ok. 2,7182. Logarytm naturalny z liczby a oznacza się często symbolem $\ln a$.

Własności logarytmów. Dla dowolnych $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in (0, +\infty)$ takich, że $a, a_1, a_2 \neq 1$ oraz dowolnego $k \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące wzory:

- $\log_a 1 = 0$,
- $\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$,
- $\log_a(b_1 : b_2) = \log_a b_1 - \log_a b_2$,
- $\log_a b^k = k \log_a b$,
- $\log_{a_1} b = \frac{\log_{a_2} b}{\log_{a_2} a_1}$,
- $a^{\log_a b} = b$.

Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = \log_a x$, gdzie $a \neq 1$ jest ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą. Okazuje się, że funkcja logarytmiczna $x \mapsto \log_a x$ jest funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej $x \mapsto a^x$.





<u>Własności funkcji logarytmicznej</u>. Dla każdej wartości podstawy $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ funkcja logarytmiczna $x \mapsto \log_a x$ jest bijekcją zbioru $(0,+\infty)$ na $\mathbb{R}$. Ponadto, gdy $a > 1$, to funkcja ta jest rosnąca, a gdy $a \in (0,1)$, to jest malejąca.

Zadania

Zadanie 11.1. Udowodnij, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie 11.2. Uprość następujące wyrażenia

(a) $\dfrac{27a^5}{20b^3} : \dfrac{9a^4}{12b^2}$,

(b) $\dfrac{25a^4}{18b^4} : \dfrac{5a^5}{9b^3}$,

(c) $\dfrac{9a^6b^5}{10c^4d^3} : \dfrac{12a^4b^7}{5c^2d^2}$,

(d) $\dfrac{6a^5b^6}{8c^3d^4} : \dfrac{15a^3b^7}{4c^4d^6}$,

(e) $\left(\dfrac{a^{-6}d^{-4}}{b^{-3}c^4}\right)^{-2} : \left(\dfrac{c^{-2}d^{-3}}{a^4b^{-2}}\right)^{-3}$,

(f) $\left(\dfrac{a^{-1}b^4}{c^2d^{-3}}\right)^{-2} : \left(\dfrac{c^{-4}b^3}{ad^{-6}}\right)^{-3}$.

Zadanie 11.3. Rozważmy zbiór $A = \left\{a\sqrt{2} + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q}\right\}$. Wykaż, że w zbiorze A nie jest wykonalne mnożenie, tzn. nieprawdą jest, że iloczyn dowolnych elementów ze zbioru A również należy do zbioru A.

Zadanie 11.4. Pokaż, że jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ jest funkcją wykładniczą, to $f(2x) + f(2y) \geqslant f(x+y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

Zadanie 11.5. Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ określona wzorem $f(x) = \left(\frac{2a}{a+1}\right)^x$ jest rosnąca. Jaką liczbą jest a?

Zadanie 11.6. Rozwiąż równanie wykładnicze

(a) $8^{3x-5} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6-5x}$,

(b) $\frac{1}{27} \cdot 3^{2x+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2x}$,

(c) $2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0$,

(d) $3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$,

(e) $\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^{7+x} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)^{2x+2}$

(f) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{11-x} = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{3x-1}$,

(g) $2^{3x} \cdot 7^{2-x} = 14^{x+1}$,

(h) $15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$.

Zadanie 11.7. Rozwiąż równanie $|3^x - 3| = -x^2 + 2x - 1$.

Zadanie 11.8. Rozwiąż nierówność wykładniczą

(a) $5 \cdot 20^x - 10^{x+1} \geqslant 0$,

(b) $2 \cdot 18^x - 6^{x+1} < 0$,

(c) $4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0$,

(d) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \leqslant 0$,

(e) $5^{x+3} - 5 \cdot 7^{-x-1} < 20 \cdot 7^{-x-1}$,

(f) $2^{x+2} - 5^{x+1} \geqslant 20 \cdot 5^x$

(g) $(x^2 - 4x + 4)^{x+4} < 1$,

(h) $(x^2 - 6x + 9)^{x+3} \leqslant 1$.

Zadanie 11.9. Rozwiąż równanie $3^x + 3^{2x} + 3^{3x} + \ldots = \frac{1}{2}$.

Zadanie 11.10. Oblicz

(a) $\log_2 16$,

(b) $\log_3 27$,

(c) $\log_5 \frac{1}{25}$,

(d) $\log_4 \frac{1}{64}$,

(e) $\log_{27} \frac{1}{3}$,

(f) $\log_{25} \frac{1}{5}$,

(g) $\log_{\sqrt[3]{2}} 2$,

(h) $\log_{\sqrt{3}} 3$,

(i) $\log_5 5\sqrt{5}$,

(j) $\log_6 6\sqrt[3]{6}$,

(k) $\log_7 1$,

(l) $\log_3 1$.

Zadanie 11.11. Uprość wyrażenia

(a) $2\log_2 6 - \log_2 9$,

(b) $\log_{\frac{1}{3}} 15 + \log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_3 25$,

(c) $\log_7(9^{\log_3 7})$,

(d) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$,

(e) $\log_5(9^{\log_3 5}) \cdot 4^{\log_2 7}$,

(f) $\log_{\sqrt[5]{13}} 121 \cdot \log_{11} \sqrt{13}$.

Zadanie 11.12. Która z liczb jest większa $\log_2 7$ czy $\log_7 2$? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 11.13. Oblicz $\log_{ab} \sqrt{\frac{a}{b}}$ wiedząc, że $\log_a b = -\frac{1}{2}$.

Zadanie 11.14. Udowodnij, że liczba 517^{100} ma 272 cyfry. (Wskazówka: skorzystaj z faktu, że $\log 517 \approx 2{,}71349$.)

Zadanie 11.15. Czym różni się wykres funkcji $f(x) = \log_3 x^2$ od wykresu funkcji $g(x) = 2\log_3 x$?

Zadanie 11.16. Rozwiąż równanie logarytmiczne

(a) $\log_4(2x - 1) = \frac{1}{2}$,

(b) $\log_3(7x - 5) = 2$,

(c) $\log(3x + 4) + \log(x + 8) = 2$,

(d) $\log(2x + 14) + \log(x + 12) = 3$,

(e) $\log_{x+1}(x^2 + x^3) = 3$,

(f) $\log_{x-1}(x^3 - x^2) = 3$,

(g) $\log_3^2 x - \log_3 x^3 + 2 = 0$,

(h) $\log_5^2 x + \log_5 \frac{1}{x} - 2 = 0$,

(i) $x^{\log x} = 100x$,

(j) $x^{\log_2 x} = 4x$.

Zadanie 11.17. Rozwiąż równanie

(a) $x^{2\log 2} - 2^{\log x} = 2$,

(b) $x^{\log 7} + 7^{\log x} = 98$.

Zadanie 11.18. Dla jakich wartości parametru $m > 0$ równanie

$$\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie?

Zadanie 11.19. Rozwiąż nierówność logarytmiczną

(a) $\log_2 x + \log_2(x+1) < 1$,

(b) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geqslant -1$,

(c) $\log_2(x-1) - \log_2(x+1) < 2$,

(d) $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) \geqslant \frac{1}{2}$,

(e) $\log_7 \log_{\frac{1}{2}}(x+11) > 0$,

(f) $\log_8 \log_3 x \leqslant \frac{1}{3}$,

(g) $\log_{\frac{1}{3}} x + 2\log_3 x < 3$,

(h) $\log_{\frac{1}{5}} x + 2\log_5 x \geqslant 3$

(i) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 > 0$,

(j) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 \geqslant 0$.

Zadanie 11.20. Rozwiąż nierówność $\log_{(2x-x^2)}(2x+4) < 0$.

Zadanie 11.21. Rozwiąż nierówność $\log_x(x^3 - \frac{1}{4}x) \leqslant 1$.

Rozwiązania

11.1. Przypuśćmy nie wprost, że $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, tzn. istnieją takie liczby naturalne p i q, że $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Zauważmy, że możemy założyć, że ułamek $\frac{p}{q}$ jest nieskracalny, tzn. $\mathrm{NWD}(p,q) = 1$. Podnosząc równość $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ do kwadratu, otrzymujmy $2 = \frac{p^2}{q^2}$. Skąd $p^2 = 2q^2$. Oznacza to, że liczba p^2 i w konsekwencji również p jest parzysta. Istnieje więc $n \in \mathbb{N}$ takie, że $p = 2n$. Podstawiając tę równość do $p^2 = 2q^2$, dostajemy $q^2 = 2n^2$. A zatem i q jest liczbą parzystą. Tym samym $\mathrm{NWD}(p,q) \geqslant 2$, co daje sprzeczność. Liczba $\sqrt{2}$ musi być więc niewymierna.

11.2. (a)

$$\frac{27a^5}{20b^3} : \frac{9a^4}{12b^2} = \frac{27a^5}{20b^3} \cdot \frac{12b^2}{9a^4} = \frac{27 \cdot 12}{20 \cdot 9} \cdot a^{5-4} \cdot b^{2-3} = \frac{9}{5}\, ab^{-1}$$

(b)

$$\frac{25a^4}{18b^4} : \frac{5a^5}{9b^3} = \frac{25a^4}{18b^4} \cdot \frac{9b^3}{5a^5} = \frac{25 \cdot 9}{18 \cdot 5} \cdot a^{4-5} \cdot b^{3-4} = \frac{5}{2}\, a^{-1}b^{-1}$$

(c)

$$\frac{9a^6b^5}{10c^4d^3} : \frac{12a^4b^7}{5c^2d^2} = \frac{9a^6b^5}{10c^4d^3} \cdot \frac{5c^2d^2}{12a^4b^7} = \frac{9 \cdot 5}{10 \cdot 12} \cdot a^{6-4} \cdot b^{5-7} \cdot c^{2-4} \cdot d^{2-3}$$
$$= \frac{45}{120} \cdot a^2b^{-2}c^{-2}d^{-1} = \frac{3}{8}\, a^2b^{-2}c^{-2}d^{-1}$$

(d)

$$\frac{6a^5b^6}{8c^3d^4} : \frac{15a^3b^7}{4c^4d^6} = \frac{6a^5b^6}{8c^3d^4} \cdot \frac{4c^4d^6}{15a^3b^7} = \frac{6\cdot 4}{8\cdot 15} \cdot a^{5-3} \cdot b^{6-7} \cdot c^{4-3} \cdot d^{6-4}$$
$$= \frac{24}{120} \cdot a^2b^{-1}c^1d^2 = \frac{1}{5}\, a^2b^{-1}cd^2$$

(e)

$$\left(\frac{a^{-6}d^{-4}}{b^{-3}c^4}\right)^{-2} : \left(\frac{c^{-2}d^{-3}}{a^4b^{-2}}\right)^{-3} = \left(a^{-6}b^3c^{-4}d^{-4}\right)^{-2} : \left(a^{-4}b^2c^{-2}d^{-3}\right)^{-3}$$
$$= \left(a^{12}b^{-6}c^8d^8\right) : \left(a^{12}b^{-6}c^6d^9\right)$$
$$= a^{12-12}b^{-6-(-6)}c^{8-6}d^{8-9} = a^0b^0c^2d^{-1} = c^2d^{-1}$$

(f)

$$\left(\frac{a^{-1}b^4}{c^2d^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{c^{-4}b^3}{ad^{-6}}\right)^{-3} = \left(a^{-1}b^4c^{-2}d^3\right)^{-2} : \left(a^{-1}b^3c^{-4}d^6\right)^{-3}$$
$$= \left(a^2b^{-8}c^4d^{-6}\right) : \left(a^3b^{-9}c^{12}d^{-18}\right)$$
$$= a^{2-3}b^{-8-(-9)}c^{4-12}d^{-6-(-18)}$$
$$= a^{-1}bc^{-8}d^{12}$$

11.3. Zauważmy, że $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in A$, bo $\sqrt{2} = 1 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot \sqrt{3}$ oraz $\sqrt{3} = 0 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \sqrt{3}$. Pokażemy, że $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \notin A$. Przypuśćmy nie wprost, że $\sqrt{6} \in A$, tzn. istnieją takie liczby $a, b \in \mathbb{Q}$, że $\sqrt{6} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$. Wtedy $6 = (a\sqrt{2}+b\sqrt{3})^2 = 2a^2 + 2ab\sqrt{6} + 3b^2$, czyli $2ab\sqrt{6} = 6 - 2a^2 - 3b^2 \in \mathbb{Q}$. Oznacza to, że $ab = 0$, czyli $a = 0$ lub $b = 0$. Jeżeli $a = 0$, to $6 = 3b^2$, skąd $b = \pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Jeżeli natomiast $b = 0$, to $6 = 2a^2$, skąd $a = \pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Zarówno w jednym jak i w drugim przypadku dochodzimy do sprzeczności. Zatem niemożliwe jest, by $\sqrt{6} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{Q}$. Innymi słowy, liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ należą do zbioru A, ale ich iloczyn $\sqrt{6}$ już nie.

11.4. Skoro f jest funkcją wykładnicza, to jest ona postaci $f(x) = a^x$ dla pewnego $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Wtedy dla dowolnego $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$f(2x) + f(2y) - f(x+y) = a^{2x} + a^{2y} - a^{x+y}$$
$$\geqslant (a^x)^2 - 2a^xa^y + (a^y)^2$$
$$= (a^x - a^y)^2 \geqslant 0.$$

Stąd $f(2x) + f(2y) \geqslant f(x+y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$.

11.5. Funkcja wykładnicza jest rosnąca wtedy i tylko wtedy, gdy jej podstawa jest większa od 1. Zatem funkcja f z zadania będzie rosnąca, gdy parametr a będzie spełniał nierówność

$$\frac{2a}{a+1} > 1.$$

Dziedziną tej nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem -1. Przekształcając wyrażenie, otrzymujemy:

$$\frac{2a}{a+1} - 1 = \frac{2a - (a+1)}{a+1} = \frac{a-1}{a+1}.$$

Nierówność przyjmuje więc postać:

$$\frac{a-1}{a+1} > 0.$$

Zapisując wyrażenie wymierne w postaci iloczynu otrzymujemy nierówność kwadratową

$$(a-1)(a+1) > 0,$$

której rozwiązaniem jest zbiór liczb spełniających warunek

$$a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Uwzględniając dziedzinę nierówności wymiernej

$$\frac{2a}{a+1} > 1,$$

stwierdzamy, że funkcja f jest rosnąca dla parametrów

$$a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

11.6. (a) Naszym celem jest rozwiązanie równania wykładniczego

$$8^{3x-5} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6-5x}.$$

Najpierw zapiszmy wszystkie liczby w postaci potęg liczby 2:

$$8 = 2^3, \qquad \frac{1}{8} = 2^{-3}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{4} = 2^{-3/2}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$(2^3)^{3x-5} = 2^{-3} \cdot (2^{-\frac{3}{2}})^{6-5x}.$$

Upraszczając wykładniki, dostajemy

$$2^{9x-15} = 2^{-12+\frac{15}{2}x}.$$

Ponieważ podstawy potęg są równe, możemy porównać wykładniki i w konsekwencji otrzymujemy równanie liniowe

$$9x - 15 = -12 + \frac{15}{2}x,$$

którego rozwiązaniem jest $x = 2$. Zatem rozwiązaniem równania wykładniczego

$$8^{3x-5} = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{6-5x}.$$

jest $x_1 = 2$.

(b) Naszym celem jest rozwiązanie równania wykładniczego

$$\frac{1}{27} \cdot 3^{2x+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2x}.$$

Najpierw zapiszmy wszystkie liczby w postaci potęg liczby 3:

$$27 = 3^3, \qquad \frac{1}{27} = 3^{-3}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3^{1/2}}{3^1} = 3^{-1/2}.$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$3^{-3} \cdot 3^{2x+1} = (3^{-1/2})^{-2x}.$$

Upraszczając wykładniki, dostajemy

$$3^{-3+2x+1} = 3^x.$$

Ponieważ podstawy potęg są równe, możemy porównać wykładniki:

$$-3 + 2x + 1 = x.$$

Rozwiązując to równanie liniowe, otrzymujemy $x = 2$. Zatem rozwiązaniem równania wykładniczego

$$\frac{1}{27} \cdot 3^{2x+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2x}$$

jest $x_1 = 2$.

(c) Rozważamy równanie wykładnicze

$$2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0.$$

Zauważmy, że $16 = 4^2$, dzięki czemu równanie można zapisać jako

$$2 \cdot (4^2)^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0,$$

czyli

$$2 \cdot (4^x)^2 - 17 \cdot 4^x + 8 = 0.$$

Wprowadzamy teraz nową zmienną, przyjmując $t := 4^x$. (Zauważmy, że wtedy $t > 0$.) Wówczas możemy przekształcić równanie wykładnicze w równanie kwadratowe

$$2t^2 - 17t + 8 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8 = 289 - 64 = 225$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 15$. Pierwiastki równania kwadratowego to

$$t_1 = \frac{17 - 15}{4} = \frac{1}{2}, \qquad t_2 = \frac{17 + 15}{4} = 8.$$

Wracamy teraz do zmiennej x:

$$4^x = \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad 4^x = 8.$$

Zapisując liczby w postaci potęg liczby 2, otrzymujemy

$$2^{2x} = 2^{-1} \quad \text{lub} \quad 2^{2x} = 2^3.$$

Ostatecznie równanie wykładnicze

$$2 \cdot 16^x - 17 \cdot 4^x + 8 = 0.$$

ma dwa rozwiązania: $x_1 = -\frac{1}{2}$ oraz $x_2 = \frac{3}{2}$.

(d) Rozważamy równanie wykładnicze

$$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Zauważmy, że $9 = 3^2$, dzięki czemu równanie można zapisać jako

$$3 \cdot (3^2)^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0,$$

czyli

$$3 \cdot (3^x)^2 - 28 \cdot 3^x + 9 = 0.$$

Wprowadzamy teraz nową zmienną, przyjmując $t := 3^x$. (Zauważmy, że wtedy $t > 0$.) Wówczas możemy przekształcić równanie wykładnicze w równanie kwadratowe

$$3t^2 - 28t + 9 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-28)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 = 784 - 108 = 676$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 26$. Pierwiastki równania kwadratowego to

$$t_1 = \frac{28 - 26}{6} = \frac{1}{3}, \qquad t_2 = \frac{28 + 26}{6} = 9.$$

Wracamy teraz do zmiennej x:

$$3^x = \frac{1}{3} \quad \text{lub} \quad 3^x = 9.$$

Zapisując liczby w postaci potęg liczby 3, otrzymujemy

$$3^x = 3^{-1} \quad \text{lub} \quad 3^x = 3^2.$$

Ostatecznie równanie wykładnicze

$$3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 = 0$$

ma dwa rozwiązania: $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 2$.

(e) Rozważamy równanie wykładnicze

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^{7+x} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)^{2x+2}.$$

Zauważmy, że liczby $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ oraz $\sqrt{6} + \sqrt{5}$ są wzajemnie odwrotne, ponieważ

$$(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5}) = 6 - 5 = 1,$$

a więc

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}.$$

Podstawiając to do równania, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}\right)^{7+x} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)^{2x+2},$$

skąd

$$\left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)^{-(7+x)} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)^{2x+2}.$$

Ponieważ podstawy potęg są jednakowe i dodatnie, możemy porównać wykładniki. Otrzymujemy równanie liniowe

$$-(7 + x) = 2x + 2,$$

którego rozwiązaniem jest $x = -3$. Zatem równanie wykładnicze

$$\left(\sqrt{6} - \sqrt{5}\right)^{7+x} = \left(\sqrt{6} + \sqrt{5}\right)^{2x+2}$$

ma jedno rozwiązanie $x_1 = -3$.

(f) Rozważamy równanie wykładnicze

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{11-x} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{3x-1}.$$

Zauważmy, że liczby $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ są wzajemnie odwrotne, ponieważ

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 3-2 = 1,$$

a więc

$$\sqrt{3}-\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}.$$

Podstawiając to do równania, otrzymujemy

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{11-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^{3x-1},$$

skąd

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{11-x} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-(3x-1)}.$$

Ponieważ podstawy potęg są jednakowe i dodatnie, możemy porównać wykładniki. Otrzymujemy równanie liniowe

$$11-x = -(3x-1),$$

którego rozwiązaniem jest $x=-3$. Zatem równanie wykładnicze

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{11-x} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{3x-1}$$

ma jedno rozwiązanie $x_1 = -5$.

(g) Rozważamy równanie wykładnicze

$$2^{3x}\cdot 7^{2-x} = 14^{x+1}.$$

Zauważmy, że $14 = 2\cdot 7$, dzięki czemu

$$14^{x+1} = (2\cdot 7)^{x+1} = 2^{x+1}\cdot 7^{x+1}.$$

Podstawiając to do równania, otrzymujemy

$$2^{3x}\cdot 7^{2-x} = 2^{x+1}\cdot 7^{x+1}.$$

Porządkujemy wyrażenia z tymi samymi podstawami, przenosząc je na przeciwne strony równania. Dostajemy

$$2^{3x-(x+1)} = 7^{x+1-(2-x)},$$

czyli

$$2^{2x-1} = 7^{2x-1}.$$

Ponieważ podstawy potęg są różne, równość ta jest możliwa tylko wtedy, gdy wykładnik jest równy zeru, tzn. $2x-1=0$. Rozwiązując to równanie liniowe, otrzymujemy: $x=\frac{1}{2}$. Zatem równanie wykładnicze

$$2^{3x}\cdot 7^{2-x} = 14^{x+1}$$

ma jedno rozwiązanie $x_1 = \frac{1}{2}$.

(h) Rozważamy równanie wykładnicze

$$15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}.$$

Zauważmy, że $15 = 3 \cdot 5$, dzięki czemu

$$15^{2x+4} = (3 \cdot 5)^{2x+4} = 3^{2x+4} \cdot 5^{2x+4}.$$

Podstawiając to do równania, otrzymujemy

$$3^{2x+4} \cdot 5^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}.$$

Porządkujemy wyrażenia z tymi samymi podstawami, przenosząc je na przeciwne strony równania. Dostajemy

$$3^{2x+4-3x} = 5^{4x-4-(2x+4)},$$

czyli

$$3^{-x+4} = 5^{2x-8}.$$

Ponieważ podstawy potęg są różne, równość ta jest możliwa tylko wtedy, gdy wykładniki są równe zeru, tzn. $-x+4=0$ oraz $2x-8=0$. W obu przypadkach otrzymujemy to samo rozwiązanie: $x=4$. Zatem równanie wykładnicze

$$15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$$

ma jedno rozwiązanie $x_1 = 4$.

11.7. Rozważamy równanie

$$|3^x - 3| = -x^2 + 2x - 1.$$

Najpierw zauważmy, że $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Powyższe równanie można więc przekształcić do następującej postaci

$$|3^x - 3| = -(x-1)^2.$$

Lewa strona równania jest zawsze nieujemna, natomiast prawa strona przyjmuje wartości nieujemne tylko wtedy, gdy $x = 1$. Oznacza to, że jedynym kandydatem na rozwiązanie jest $x = 1$. Sprawdźmy to! Dla $x = 1$ mamy $|3^1 - 3| = |3-3| = |0| = 0$ oraz $-(1-1)^2 = 0$. Zatem istotnie $x_1 = 1$ jest rozwiązaniem równania

$$|3^x - 3| = -x^2 + 2x - 1.$$

11.8. (a) Rozważamy nierówność wykładniczą

$$5 \cdot 20^x - 10^{x+1} \geqslant 0.$$

Zauważmy, że $20 = 2 \cdot 10$, dzięki czemu mamy

$$20^x = (2 \cdot 10)^x = 2^x \cdot 10^x.$$

Podstawiając to do nierówności, otrzymujemy

$$5 \cdot 2^x \cdot 10^x - 10 \cdot 10^x \geqslant 0.$$

Wyłączając wspólny czynnik $5 \cdot 10^x$ przed nawias, upraszczamy nierówność do postaci:

$$5 \cdot 10^x (2^x - 2) \geqslant 0.$$

Ponieważ $5 \cdot 10^x > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, możemy podzielić przez ten czynnik, nie zmieniając zbioru rozwiązań: powyższej nierówności. Otrzymujemy

$$2^x \geqslant 2.$$

Opuszczając podstawę (która jest większa od 1), kierunek nierówności pozostaje niezmieniony, stąd $x \geqslant 1$. Zatem rozwiązaniem nierówności wykładniczej

$$5 \cdot 20^x - 10^{x+1} \geqslant 0$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających warunek $x \geqslant 1$.

(b) Rozważamy nierówność wykładniczą

$$2 \cdot 18^x - 6^{x+1} < 0.$$

Zauważmy, że $18 = 3 \cdot 6$, dzięki czemu mamy

$$18^x = (3 \cdot 6)^x = 3^x \cdot 6^x.$$

Podstawiając to do nierówności, otrzymujemy

$$2 \cdot 3^x \cdot 6^x - 6 \cdot 6^x < 0.$$

Wyłączając wspólny czynnik $2 \cdot 6^x$ przed nawias, upraszczamy nierówność do postaci:

$$2 \cdot 6^x(3^x - 3) < 0.$$

Ponieważ $2 \cdot 6^x > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, możemy podzielić przez ten czynnik, nie zmieniając zbioru rozwiązań nierówności. Otrzymujemy

$$3^x - 3 < 0.$$

Opuszczając podstawę (która jest większa od 1), kierunek nierówności pozostaje niezmieniony, stąd

$$3^x < 3 \quad \Rightarrow \quad x < 1.$$

Zatem rozwiązaniem nierówności wykładniczej

$$2 \cdot 18^x - 6^{x+1} < 0$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających warunek $x < 1$.

(c) Rozważamy nierówność wykładniczą

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0.$$

Najpierw przekształćmy wyrażenie $4^{x+\frac{1}{2}}$ tak, by wszystkie potęgi miały tę samą podstawę:

$$4^{x+\frac{1}{2}} = (2^2)^{x+\frac{1}{2}} = 2^{2x+1} = 2 \cdot (2^x)^2.$$

Podstawiając to do nierówności, otrzymujemy:

$$2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 < 0.$$

Wprowadzamy teraz nową zmienną, przyjmując $t := 2^x$. (Zauważmy, że $t > 0$.) Wówczas nierówność wykładnicza sprowadza się do nierówności kwadratowej:

$$2t^2 - 5t + 2 < 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 3$. Pierwiastkami wielomianu $2t^2 - 5t + 2$ są więc

$$t_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, \qquad t_2 = \frac{5+3}{4} = 2.$$

Ponieważ współczynnik przy wyrażeniu t^2 jest dodatni, ramiona paraboli są skierowane ku górze. Stąd rozwiązaniem nierówności

$$2t^2 - 5t + 2 < 0.$$

jest przedział

$$\frac{1}{2} < t < 2.$$

Powracając do zmiennej x, otrzymujemy

$$\frac{1}{2} < 2^x < 2.$$

Zapisując obie strony w postaci potęg liczby 2, mamy

$$2^{-1} < 2^x < 2^1,$$

skąd $-1 < x < 1$. Rozwiązaniem nierówności wykładniczej

$$4^{x+\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^x + 2 < 0$$

jest więc zbiór wszystkich liczb x spełniających warunek

$$x \in (-1, 1).$$

(d) Rozważamy nierówność wykładniczą

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \leqslant 0.$$

Najpierw przekształćmy wyrażenie 4^x tak, by wszystkie potęgi miały tę samą podstawę:

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2.$$

Podstawiając to do nierówności, otrzymujemy:

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \leqslant 0.$$

Zauważmy, że $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$, więc:

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0,$$

czyli

$$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0.$$

Wprowadzamy nową zmienną $t := 2^x$. Wówczas nierówność wykładnicza sprowadza się do nierówności kwadratowej:

$$t^2 - 6t + 8 \leqslant 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 2$. Pierwiastkami wielomianu $t^2 - 6t + 8$ są więc

$$t_1 = \frac{6-2}{2} = 2, \qquad t_2 = \frac{6+2}{2} = 4.$$

Ponieważ współczynnik przy wyrażeniu t^2 jest dodatni, ramiona paraboli są skierowane ku górze. Stąd rozwiązaniem nierówności

$$t^2 - 6t + 8 \leqslant 0$$

jest przedział

$$2 \leqslant t \leqslant 4.$$

Powracając do zmiennej x, otrzymujemy

$$2 \leqslant 2^x \leqslant 4.$$

Zapisując obie strony w postaci potęg liczby 2, mamy

$$2^1 \leqslant 2^x \leqslant 2^2,$$

skąd

$$1 \leqslant x \leqslant 2.$$

Rozwiązaniem nierówności wykładniczej

$$4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 \leqslant 0$$

jest więc zbiór wszystkich liczb x spełniających warunek

$$x \in [1, 2].$$

(e) Rozważamy nierówność wykładniczą

$$5^{x+3} - 5 \cdot 7^{-x-1} < 20 \cdot 7^{-x-1}.$$

Najpierw przenieśmy wyrazy zawierające 7^{-x-1} na prawą stronę:

$$5^{x+3} < 20 \cdot 7^{-x-1} + 5 \cdot 7^{-x-1},$$

co daje

$$5^{x+3} < 25 \cdot 7^{-x-1}.$$

Następnie dzielimy obie strony nierówności przez $25 \cdot 7^{-x-1}$. Możemy to zrobić bez obawy o zmianę kierunku nierówności, bowiem $7^{-x-1} > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy wówczas

$$\frac{5^{x+3}}{25 \cdot 7^{-x-1}} < 1.$$

Upraszczając lewą stronę, mamy

$$5^{x+1} \cdot 7^{x+1} < 1,$$

czyli
$$(5 \cdot 7)^{x+1} < 1.$$
Zapisując prawą stronę jako potęgę liczby 35, otrzymujemy
$$35^{x+1} < 35^0,$$
skąd $x + 1 < 0$. Rozwiązaniem nierówności wykładniczej
$$5^{x+3} - 5 \cdot 7^{-x-1} < 20 \cdot 7^{-x-1}$$
jest więc zbiór
$$x \in (-\infty, -1).$$

(f) Rozważamy nierówność wykładniczą
$$2^{x+2} - 5^{x+1} \geqslant 20 \cdot 5^x.$$
Najpierw przenieśmy wyrazy zawierające 5^x na prawą stronę:
$$2^{x+2} \geqslant 5^{x+1} + 20 \cdot 5^x,$$
co daje
$$2^{x+2} \geqslant 25 \cdot 5^x.$$
Następnie dzielimy obie strony nierówności przez 5^{x+2}. Możemy to zrobić bez obawy o zmianę kierunku nierówności, bowiem $5^{x+2} > 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Otrzymujemy wówczas
$$\frac{2^{x+2}}{5^{x+2}} \geqslant 1.$$
Upraszczając lewą stronę, mamy
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} \geqslant 1.$$
Zapisując prawą stronę jako potęgę liczby $\frac{2}{5}$, otrzymujemy
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} \geqslant \left(\frac{2}{5}\right)^0.$$
Ponieważ $\frac{2}{5} < 1$, opuszczając podstawy musimy pamiętać o zamianie kierunku nierówności. Mamy więc
$$x + 2 \leqslant 0.$$
Rozwiązaniem nierówności wykładniczej
$$2^{x+2} - 5^{x+1} \geqslant 20 \cdot 5^x$$
jest zbiór
$$x \in (-\infty, -2].$$

(g) Rozważamy nierówność
$$(x^2 - 4x + 4)^{x+4} < 1.$$
Najpierw zauważmy, że $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geqslant 0$. Nierówność przyjmuje więc postać
$$\left[(x-2)^2\right]^{x+4} < \left[(x-2)^2\right]^0.$$

Rozważamy teraz trzy przypadki w zależności od wartości podstawy $(x-2)^2$.

Przypadek I: $(x-2)^2 = 1$. Ma to miejsce dla $x = 1$ lub $x = 3$. Wówczas

$$\left[(x-2)^2\right]^{x+4} = 1,$$

a to oznacza, że dla wartości $x = 1$ i $x = 3$ wyjściowa nierówność nie jest spełniona.

Przypadek II: $(x-2)^2 < 1$. Sytuacja ta ma miejsce, gdy $-1 < x-2 < 1$, tzn. gdy $1 < x < 3$. Ponieważ $(x-2)^2 < 1$, opuszczając podstawy w

$$\left[(x-2)^2\right]^{x+4} < \left[(x-2)^2\right]^{0}$$

musimy obrócić kierunek nierówności. Otrzymujemy zatem

$$x + 4 > 0,$$

skąd $x > -4$. Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku rozważamy jedynie te wartości x, które spełniają nierówność $1 < x < 3$, ostatecznym rozwiązaniem tej części jest zbiór $x \in (1, 3)$.

Przypadek III: $(x-2)^2 > 1$. Sytuacja ta ma miejsce, gdy $x - 2 > 1$ lub $x - 2 < -1$, tzn. gdy $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$. Ponieważ $(x-2)^2 > 1$, opuszczając podstawy w

$$\left[(x-2)^2\right]^{x+4} < \left[(x-2)^2\right]^{0}$$

nie obracamy kierunku nierówności. Otrzymujemy zatem

$$x + 4 < 0,$$

skąd $x < -4$. Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku rozważamy jedynie te wartości x, które spełniają warunek $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, ostatecznym rozwiązaniem tej części jest zbiór $x \in (-\infty, -4)$.

Łącząc wszystkie przypadki, stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności

$$(x^2 - 4x + 4)^{x+4} < 1$$

jest zbiór $x \in (-\infty, -4) \cup (1, 3)$.

(h) Rozważamy nierówność

$$(x^2 - 6x + 9)^{x+3} \leqslant 1.$$

Najpierw zauważmy, że $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geqslant 0$. Nierówność przyjmuje więc postać

$$\left[(x-3)^2\right]^{x+3} \leqslant \left[(x-3)^2\right]^{0}.$$

Rozważamy teraz trzy przypadki w zależności od wartości podstawy $(x-3)^2$.

Przypadek I: $(x-3)^2 = 1$. Ma to miejsce dla $x = 2$ lub $x = 4$. Wówczas

$$\left[(x-3)^2\right]^{x+3} = 1.$$

Oznacza, że dla wartości $x = 2$ i $x = 4$ wyjściowa nierówność jest spełniona.

Przypadek II: $(x-3)^2 < 1$. Sytuacja ta ma miejsce, gdy $-1 < x-3 < 1$, tzn. gdy $2 < x < 4$. Ponieważ $(x-3)^2 < 1$, opuszczając podstawy w

$$\left[(x-3)^2\right]^{x+3} \leqslant \left[(x-3)^2\right]^{0}$$

musimy obrócić kierunek nierówności. Otrzymujemy zatem

$$x + 3 > 0,$$

skąd $x > -3$. Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku rozważamy jedynie te wartości x, które spełniają nierówność $2 < x < 4$, ostatecznym rozwiązaniem tej części jest zbiór $x \in (2, 4)$.

Przypadek III: $(x-3)^2 > 1$. Sytuacja ta ma miejsce, gdy $x - 3 > 1$ lub $x - 3 < -1$, tzn. gdy $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$. Ponieważ $(x-3)^2 > 1$, opuszczając podstawy w

$$\left[(x-3)^2\right]^{x+3} \leqslant \left[(x-3)^2\right]^0$$

nie obracamy kierunku nierówności. Otrzymujemy zatem

$$x + 3 \quad 0,$$

skąd $x \quad -3$. Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku rozważamy jedynie te wartości x, które spełniają warunek $x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$, ostatecznym rozwiązaniem tej części jest zbiór $x \in (-\infty, -3]$.

Łącząc wszystkie przypadki, stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności

$$(x^2 - 6x + 9)^{x+3} \leqslant 1$$

jest zbiór $x \in (-\infty, -3] \cup [2, 4]$.

11.9. Zanim przejdziemy do rozwiązania zadania przypomnijmy, że szereg geometryczny

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots$$

zbiega, jeśli $|q| < 1$. Wówczas jego suma wynosi:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Rozważmy teraz równanie

$$3^x + 3^{2x} + 3^{3x} + \dots = \frac{1}{2}.$$

Zauważmy, że po lewej stronie nierówności występuje szereg geometryczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 3^x$ i ilorazie $q = 3^x$. Będzie on zbieżny, gdy $|q| < 1$, czyli dla $x < 0$. Oznacza to, że dziedziną rozważanego równania jest zbiór $D = (-\infty, 0)$.

Sumując lewą stronę równania

$$3^x + 3^{2x} + 3^{3x} + \dots = \frac{1}{2},$$

otrzymujemy

$$\frac{3^x}{1 - 3^x} = \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$2 \cdot 3^x = 1 - 3^x$$

i w konsekwencji

$$3 \cdot 3^x = 1.$$

Zapisując obydwie strony jako potęgi liczby 3, dostajemy

$$3^{x+1} = 3^0,$$

skąd $x = -1 \in D$. Oznacza to, że równanie

$$3^x + 3^{2x} + 3^{3x} + \ldots = \frac{1}{2}$$

posiada jedno rozwiązanie $x_1 = -1$.

11.10. (a) $\log_2 16 = 4$, bo $2^4 = 16$

(b) $\log_3 27 = 3$, bo $3^3 = 27$

(c) $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, bo $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

(d) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$, bo $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

(e) $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$, bo $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$

(f) $\log_{25} \frac{1}{5} = -\frac{1}{2}$, bo $25^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$

(g) $\log_{\sqrt[3]{2}} 2 = 3$, bo $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$

(h) $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$, bo $(\sqrt{3})^2 = 3$

(i) $\log_5 5\sqrt{5} = \frac{3}{2}$, bo $5^{\frac{3}{2}} = 5^{1+\frac{1}{2}} = 5 \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$

(j) $\log_6 6\sqrt[3]{6} = \frac{4}{3}$, bo $6^{\frac{4}{3}} = 6^{1+\frac{1}{3}} = 6 \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 6\sqrt[3]{6}$

(k) $\log_7 1 = 0$, bo $7^0 = 1$

(l) $\log_3 1 = 0$, bo $3^0 = 1$

11.11. (a)

$$2\log_2 6 - \log_2 9 = \log_2 6^2 - \log_2 9 = \log_2 36 - \log_2 9 = \log_2 4 = 2$$

(b)

$$\log_{\frac{1}{3}} 15 + \log_{\frac{1}{3}} 5 + \log_3 25 = \log_{\frac{1}{3}} 15 + \log_{\frac{1}{3}} 5 + \frac{\log_{\frac{1}{3}} 25}{\log_{\frac{1}{3}} 3} = \log_{\frac{1}{3}}(15 \cdot 5) + \frac{\log_{\frac{1}{3}} 25}{-1}$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} 75 - \log_{\frac{1}{3}} 25 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{75}{25} = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

(c)

$$\log_7(9^{\log_3 7}) = (\log_3 7) \cdot \log_7 9 = (\log_3 7) \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 7} = \log_3 9 = 2$$

(d)

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \frac{\log_3 3}{\log_3 2} \cdot \log_3 2^2 = \frac{1}{\log_3 2} \cdot 2\log_3 2 = 2$$

(e)

$$\log_5(9^{\log_3 5}) \cdot 4^{\log_2 7} = \log_5(3^{2\log_3 5}) \cdot 2^{2\log_2 7} = \log_5(3^{\log_3 5^2}) \cdot 2^{\log_2 7^2}$$

$$= \log_5(5^2) \cdot 7^2 = 2 \cdot 49 = 98$$

(f)

$$\log_{\sqrt[5]{13}} 121 \cdot \log_{11} \sqrt{13} = \frac{\log_{11} 121}{\log_{11} 13^{\frac{1}{5}}} \cdot \log_{11} 13^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{5}\log_{11} 13} \cdot \frac{1}{2}\log_{11} 13 = 5$$

11.12. Z faktu, że funkcja logarytmiczna o podstawie większej od 1 jest rosnąca wynika, że $\log_2 7 > \log_2 2 = 1 = \log_7 7 > \log_7 2$.

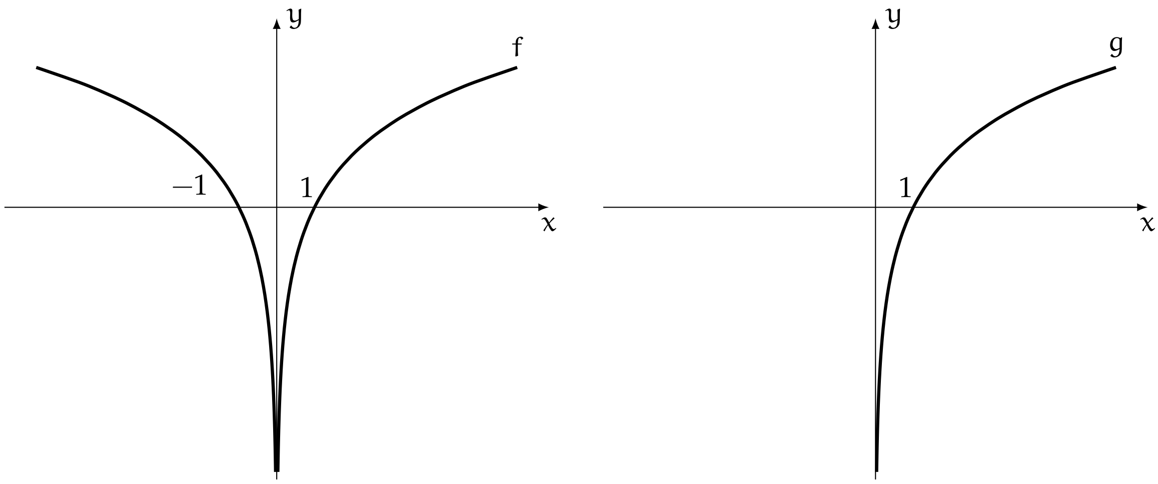
11.13. Z treści zadania wiemy, że $\log_a b = -\frac{1}{2}$. Zatem $a^{-\frac{1}{2}} = b$, skąd $ab = \sqrt{a}$ oraz $\sqrt{\frac{a}{b}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt{a}^{\frac{3}{2}}$. W konsekwencji $\log_{ab} \sqrt{\frac{a}{b}} = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$.

11.14. Z treści zadania wiemy, że

$$517^{100} = 10^{\log 517^{100}} = 10^{100\cdot\log 517} \approx 10^{271{,}349}.$$

Zatem $10^{271} \leqslant 517^{100} < 10^{272}$. Oznacza to, że liczba 517^{100} ma 272 cyfry.

11.15. Mamy $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $D_g = (0, +\infty)$. Ponadto



11.16. (a) Zaczniemy od określenia dziedziny równania. Przypomnijmy, że funkcja logarytmiczna jest poprawnie zdefiniowana jedynie dla argumentów dodatnich. W naszym przypadku dziedziną równania

$$\log_4(2x - 1) = \frac{1}{2}$$

jest zatem zbiór $D = (\frac{1}{2}, +\infty)$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy

$$4^{\frac{1}{2}} = 2x - 1,$$

skąd

$$2x = 3.$$

I w konsekwencji $x = \frac{3}{2} \in D$. Zatem równanie

$$\log_4(2x - 1) = \frac{1}{2}$$

posiada jedno rozwiązanie $x_1 = \frac{3}{2}$.

(b) Zaczniemy od określenia dziedziny równania. Przypomnijmy, że funkcja logarytmiczna jest poprawnie zdefiniowana jedynie dla argumentów dodatnich. W naszym przypadku dziedziną równania

$$\log_3(7x-5)=2$$

jest zatem zbiór $D=(\frac{5}{7},+\infty)$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Korzystając z definicji logarytmu, otrzymujemy

$$3^2=7x-5,$$

skąd

$$7x=14.$$

I w konsekwencji $x=2\in D$. Zatem równanie

$$\log_3(7x-5)=2$$

posiada jedno rozwiązanie $x_1=2$.

(c) Równanie

$$\log(3x+4)+\log(x+8)=2$$

jest poprawnie określone jedynie dla tych liczb rzeczywistych x, które jednocześnie spełniają następujące dwa warunki

$$3x+4>0 \quad \text{oraz} \quad x+8>0.$$

Dziedziną równania jest więc zbiór

$$D=(\frac{4}{3},+\infty)\cap(-8,+\infty)=(\frac{4}{3},+\infty).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Korzystając z własności logarytmów, otrzymujemy

$$\log\big[(3x+4)(x+8)\big]=2,$$

skąd

$$(3x+4)(x+8)=10^2.$$

Po uporządkowaniu wyrazów, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$3x^2+28x-68=0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta=28^2-4\cdot3\cdot(-68)=1600$. Zatem $\sqrt{\Delta}=40$. Pierwiastkami równania kwadratowego są więc liczby

$$x_1=\frac{-28-40}{6}=-\frac{34}{3}\notin D, \qquad x_2=\frac{-28+40}{6}=2\in D.$$

Ostatecznie równanie logarytmiczne

$$\log(3x+4)+\log(x+8)=2$$

posiada jedno rozwiązanie $x_1=2$.

(d) Równanie

$$\log(2x+14)+\log(x+12)=3$$

jest poprawnie określone jedynie dla tych liczb rzeczywistych x, które jednocześnie spełniają następujące dwa warunki

$$2x+14>0 \quad \text{oraz} \quad x+12>0.$$

Dziedziną równania jest więc zbiór

$$D=(-7,+\infty)\cap(-12,+\infty)=(-7,+\infty).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Korzystając z własności logarytmów, otrzymujemy

$$\log\big[(2x+14)(x+12)\big]=3,$$

skąd

$$(2x+14)(x+12)=10^3.$$

Po uporządkowaniu wyrazów, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2x^2+38x-832=0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta=38^2-4\cdot 2\cdot(-832)=1444+6656=8100$. Zatem $\sqrt{\Delta}=90$. Pierwiastkami równania kwadratowego są więc liczby

$$x_1=\frac{-38-90}{4}=-32\notin D, \qquad x_2=\frac{-38+90}{4}=13\in D.$$

Ostatecznie równanie logarytmiczne

$$\log(2x+14)+\log(x+12)=3$$

posiada jedno rozwiązanie $x_1=13$.

(e) Zaczniemy od określenia dziedziny równania. Przypomnijmy, że funkcja logarytmiczna jest poprawnie określona jedynie dla argumentów dodatnich. Dodatkowo podstawa logarytmu również musi być dodatnia i różna od 1. W naszym przypadku dziedziną równania

$$\log_{x+1}(x^2+x^3)=3$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, które jednocześnie spełniają następujące trzy warunki

$$x+1>0, \qquad x+1\neq 1, \qquad x^2+x^3>0.$$

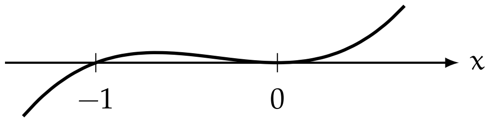
Dwa pierwsze warunki oznaczają odpowiednio

$$x>-1 \quad \text{oraz} \quad x\neq 0.$$

Trzeci warunek wymaga osobnego rozpatrzenia. Zauważmy, że $x^2+x^3=x^2(x+1)$. Rozwiązaniem nierówności

$$x^2(x+1)>0$$

jest zbiór $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$



Po uwzględnieniu wszystkich trzech warunków otrzymujemy, że dziedziną równania logarytmicznego jest zbiór
$$D = (-1, 0) \cup (0, +\infty).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania
$$\log_{x+1}(x^2 + x^3) = 3$$
w obrębie wyznaczonej wcześniej dziedziny. Korzystając z definicji logarytmu, dostajemy
$$(x+1)^3 = x^2 + x^3.$$

Ponieważ
$$\begin{aligned}(x+1)^3 - x^2 - x^3 &= (x+1)^3 - x^2(x+1) = (x+1)\left[(x+1)^2 - x^2\right]\\ &= (x+1)(x^2 + 2x + 1 - x^2) = (x+1)(2x+1),\end{aligned}$$
powyższe równanie przyjmuje postać
$$(x+1)(2x+1) = 0.$$

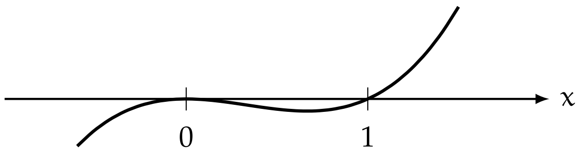
Stąd
$$x = -1 \notin D \qquad \text{oraz} \qquad x = -\frac{1}{2} \in D.$$

Ostatecznie równanie logarytmiczne
$$\log_{x+1}(x^2 + x^3) = 3$$
posiada jedno rozwiązanie $x_1 = -\frac{1}{2}$.

(f) Zaczniemy od określenia dziedziny równania. Przypomnijmy, że funkcja logarytmiczna jest poprawnie określona jedynie dla argumentów dodatnich. Dodatkowo podstawa logarytmu również musi być dodatnia i różna od 1. W naszym przypadku dziedziną równania
$$\log_{x-1}(x^3 - x^2) = 3$$
jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, które jednocześnie spełniają następujące trzy warunki
$$x - 1 > 0, \qquad x - 1 \neq 1, \qquad x^3 - x^2 > 0.$$

Dwa pierwsze warunki oznaczają odpowiednio
$$x > 1 \quad \text{oraz} \quad x \neq 2.$$

Trzeci warunek wymaga osobnego rozpatrzenia. Zauważmy, że $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Rozwiązaniem nierówności
$$x^2(x-1) > 0$$
jest zbiór $x \in (1, +\infty)$.



Po uwzględnieniu wszystkich trzech warunków otrzymujemy, że dziedziną równania logarytmicznego jest zbiór
$$D = (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania
$$\log_{x-1}(x^3 - x^2) = 3$$
w obrębie wyznaczonej wcześniej dziedziny. Korzystając z definicji logarytmu, dostajemy
$$(x-1)^3 = x^3 - x^2.$$

Ponieważ
$$\begin{aligned}(x-1)^3 - (x^3 - x^2) &= (x-1)^3 - x^2(x-1) = (x-1)\big[(x-1)^2 - x^2\big] \\ &= (x-1)(x^2 - 2x + 1 - x^2) = (x-1)(-2x+1),\end{aligned}$$
powyższe równanie przyjmuje postać
$$(x-1)(-2x+1) = 0.$$

Stąd
$$x = 1 \notin D \qquad \text{oraz} \qquad x = \frac{1}{2} \notin D.$$
Ostatecznie równanie logarytmiczne
$$\log_{x-1}(x^3 - x^2) = 3$$
nie posiada rozwiązań.

(g) Zauważmy, że dziedziną równania
$$\log_3^2 x - \log_3 x^3 + 2 = 0$$
jest zbiór $D = (0, +\infty)$. Przechodzimy teraz do rozwiązania równania. Korzystając z własności logarytmu, zauważmy, że $\log_3 x^3 = 3\log_3 x$. Otrzymujemy więc równanie kwadratowe względem zmiennej $t = \log_3 x$:
$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$
Obliczamy wyróżnik tego równania $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$ oraz jego pierwiastki
$$t_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \qquad t_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$
Wracamy teraz do zmiennej x. Mamy
$$\log_3 x = 1 \quad \text{lub} \log_3 x = 2.$$
Stąd $x = 3^1 = 3$ lub $x = 3^2 = 9$. Obie wartości należą do dziedziny $D = (0, +\infty)$. Ostatecznie równanie
$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x^3 + 2 = 0$$
posiada dwa rozwiązania $x_1 = 3$ oraz $x_2 = 9$.

(h) Zauważmy, że dziedziną równania

$$\log_5^2 x + \log_5 \frac{1}{x} - 2 = 0$$

jest zbiór $D = (0, +\infty)$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania. Korzystając z własności logarytmu, zauważmy, że

$$\log_5 \frac{1}{x} = -\log_5 x.$$

Otrzymujemy więc równanie kwadratowe względem zmiennej $t = \log_5 x$:

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik tego równania $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$ oraz jego pierwiastki:

$$t_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \qquad t_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Wracamy teraz do zmiennej x. Mamy

$$\log_5 x = -1 \quad \text{lub} \quad \log_5 x = 2.$$

Stąd $x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$ lub $x = 5^2 = 25$. Obie wartości należą do dziedziny $D = (0, +\infty)$.

Ostatecznie równanie

$$\log_5^2 x + \log_5 \frac{1}{x} - 2 = 0$$

posiada dwa rozwiązania $x_1 = \frac{1}{5}$ oraz $x_2 = 25$.

(i) Zauważmy, że dziedziną równania

$$x^{\log x} = 100x$$

jest zbiór $D = (0, +\infty)$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Logarytmując obie strony równania logarytmem przy podstawie 10, otrzymujemy

$$\log\left(x^{\log x}\right) = \log(100x),$$

skąd

$$\log x \cdot \log x = \log 100 + \log x.$$

Ponieważ $\log 100 = 2$, otrzymujemy równanie kwadratowe względem zmiennej $t = \log x$:

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 3$ oraz

$$t_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \qquad t_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Wracając do zmiennej x, mamy

$$\log x = -1 \quad \text{lub} \quad \log x = 2.$$

Zatem $x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ oraz $x = 10^2 = 100$. Obie wartości należą do dziedziny $D = (0, +\infty)$.

Ostatecznie równanie

$$x^{\log x} = 100x$$

posiada dwa rozwiązania $x_1 = \frac{1}{10}$ oraz $x_2 = 100$.

(j) Zauważmy, że dziedziną równania

$$x^{\log_2 x} = 4x$$

jest zbiór $D = (0, +\infty)$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Logarytmując obie strony równania logarytmem przy podstawie 2, otrzymujemy

$$\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2(4x),$$

skąd

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 4 + \log_2 x.$$

Ponieważ $\log_2 4 = 2$, otrzymujemy równanie kwadratowe względem zmiennej $t = \log_2 x$:

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 3$ oraz

$$t_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \qquad t_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Wracając do zmiennej x, mamy

$$\log_2 x = -1 \quad \text{lub} \quad \log_2 x = 2.$$

Zatem $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ oraz $x = 2^2 = 4$. Obie wartości należą do dziedziny $D = (0, +\infty)$.

Ostatecznie równanie

$$x^{\log_2 x} = 4x$$

posiada dwa rozwiązania $x_1 = \frac{1}{2}$ oraz $x_2 = 4$.

(a) Zauważmy, że dziedziną równania

$$x^{2\log 2} - 2^{\log x} = 2$$

jest zbiór $D = (0, +\infty)$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Wprowadzamy podstawienie $t = 2^{\log x}$. Zauważmy, że

$$x^{2\log 2} = (2^{\log x})^2 = t^2.$$

Równanie

$$x^{2\log 2} - 2^{\log x} = 2$$

przyjmuje więc postać

$$t^2 - t - 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$ oraz pierwiastki równania kwadratowego

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{1+8}}{2} = -1, \qquad t_2 = \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2.$$

Pierwiastek $t_1 = -1$ odrzucamy, ponieważ $2^{\log x} > 0$ dla wszystkich $x > 0$. Dla $t_2 = 2$ mamy

$$2^{\log x} = 2,$$

skąd wynika, że $\log x = 1$, czyli $x = 10 \in D$.

Ostatecznie równanie

$$x^{2\log 2} - 2^{\log x} = 2$$

posiada jedno rozwiązanie $x_1 = 10$.

(b) Zauważmy, że dziedziną równania

$$x^{\log 7} + 7^{\log x} = 98$$

jest zbiór $D = (0, +\infty)$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Wprowadzamy podstawienie $t = \log x$. Zauważmy, że

$$x^{\log 7} = 7^{\log x} = 7^t,$$

więc równanie przyjmuje postać

$$2 \cdot 7^t = 98.$$

Możemy je również zapisać jako

$$7^t = 7^2.$$

Zatem $t = 2$. Wracając do zmiennej x, mamy

$$\log x = 2,$$

skąd $x = 10^2 = 100 \in D$.

Ostatecznie równanie

$$x^{\log 7} + 7^{\log x} = 98$$

posiada jedno rozwiązanie $x_1 = 100$.

11.17. Dziedziną równania

$$\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, które jednocześnie spełniają następujące trzy warunki

$$mx > 0, \qquad x + 1 \neq 0, \qquad \log(x+1) \neq 0.$$

Dwa pierwsze warunki oznaczają odpowiednio

$$x > 0 \quad \text{oraz} \quad x \neq -1$$

(pamiętajmy, że $m > 0$). Jeżeli chodzi o trzeci warunek, to zauważmy, że $\log(x+1) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x + 1 = 1$, czyli gdy $x = 0$. Dziedziną równania, niezależnie od wartości parametru $m > 0$, jest więc zbiór $D = (0, +\infty)$.

Przechodzimy teraz do znalezienia tych wartości parametru m, dla których równanie

$$\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Powyższe równanie możemy przekształcić do postaci

$$\log(mx) = 2\log(x+1),$$

skąd

$$\log(mx) = \log(x+1)^2.$$

W konsekwencji otrzymujemy równanie kwadratowe

$$mx = (x+1)^2.$$

Rozwijając prawą stronę i porządkując wyrazy, otrzymujemy równanie w postaci ogólnej

$$x^2 + (2-m)x + 1 = 0.$$

Zauważmy, że wszystkie powyższe przekształcenia są odwracalne, co oznacza, że każde rozwiązanie powyższego równania kwadratowego, należące do dziedziny D, odpowiada rozwiązaniu pierwotnego równania logarytmicznego i na odwrót – każde rozwiązanie równania logarytmicznego jest rozwiązaniem równania kwadratowego.

Wystarczy więc zbadać, dla jakiego parametru $m > 0$ równanie kwadratowe

$$x^2 + (2-m)x + 1 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Dzieje się tak wtedy, gdy $\Delta = 0$. Obliczamy wyróżnik

$$\Delta = (2-m)^2 - 4 = 4 - 4m + m^2 - 4 = m^2 - 4m = m(m-4).$$

Równość $\Delta = 0$ zachodzi więc wtedy i tylko wtedy, gdy $m = 0$ lub $m = 4$. Ponieważ z założenia $m > 0$, jedyną dopuszczalną wartością parametru jest $m = 4$.

11.18. (a) Nierówność

$$\log_2 x + \log_2(x+1) < 1$$

jest poprawnie określone jedynie dla tych liczb rzeczywistych x, które spełniają jednocześnie następujące dwa warunki

$$x > 0 \quad \text{oraz} \quad x + 1 > 0.$$

Dziedziną równania jest więc zbiór

$$D = (0, +\infty) \cap (-1, +\infty) = (0, +\infty).$$

Przejdziemy teraz do rozwiązania tej nierówności w określonej dziedzinie. Korzystając z własności logarytmów, przekształcamy lewą stronę i otrzymujemy

$$\log_2\big[x(x+1)\big] < 1.$$

Zapisując prawą stronę jako logarytm o podstawie 2, mamy

$$\log_2(x^2 + x) < \log_2 2$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest większa od 1, możemy „opuścić logarytmy", zachowując kierunek nierówności:

$$x^2 + x < 2.$$

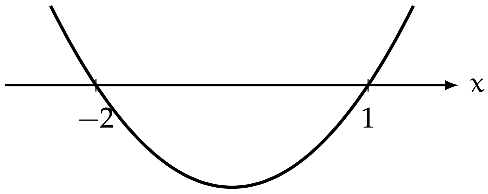
Uporządkowując wyrazy, otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$x^2 + x - 2 < 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 3$. Zatem pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 + x - 2$ są równe

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Z wykresu wielomianu $x^2 + x - 2$ odczytujemy, że nierówność $x^2 + x - 2 < 0$ jest spełniona dla $x \in (-2, 1)$.



Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (0, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_2 x + \log_2(x+1) < 1$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek

$$x \in (0, +\infty) \cap (-2, 1) = (0, 1).$$

(b) Nierówność

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geqslant -1$$

jest poprawnie określona jedynie dla tych liczb rzeczywistych x, które spełniają jednocześnie następujące dwa warunki

$$x > 0 \quad \text{oraz} \quad x - 1 > 0.$$

Dziedziną nierówności jest więc zbiór

$$D = (0, +\infty) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania tej nierówności w określonej dziedzinie. Korzystając z własności logarytmów, przekształcamy lewą stronę i otrzymujemy

$$\log_{\frac{1}{2}} \left[x(x-1)\right] \geqslant -1.$$

Zapisując prawą stronę jako logarytm o podstawie $\frac{1}{2}$, mamy

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 2.$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest mniejsza od 1, kierunek nierówności odwraca się przy opuszczaniu logarytmów

$$x^2 - x \leqslant 2.$$

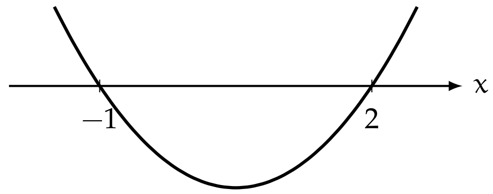
Uporządkowując wyrazy, otrzymujemy nierówność kwadratową:

$$x^2 - x - 2 \leqslant 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$. Stąd pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - x - \frac{1}{2}$ są równe

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1, \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

Z wykresu wielomianu $x^2 - x - 2$ odczytujemy, że nierówność $x^2 - x - 2 \leqslant 0$ jest spełniona dla $x \in [-1, 2]$.



Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (1, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \geqslant -1$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek

$$x \in (1, +\infty) \cap [-1, 2] = (1, 2].$$

(c) Zauważmy, że dziedziną nierówności

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) < 2$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których spełnione są jednocześnie następujące dwa warunki

$$x - 1 > 0 \quad \text{oraz} \quad x + 1 > 0.$$

Dziedziną nierówności jest więc zbiór

$$D = (1, +\infty) \cap (-1, +\infty) = (1, +\infty).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania tej nierówności w określonej dziedzinie. Korzystając z własności logarytmów, przekształcamy lewą stronę i otrzymujemy

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} < 2.$$

Zapisując prawą stronę jako logarytm o podstawie 2, mamy

$$\log_2 \frac{x-1}{x+1} < \log_2 4.$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest większa od 1, możemy „opuścić logarytmy", zachowując kierunek nierówności:

$$\frac{x-1}{x+1} < 4.$$

Z określenia dziedziny D wiemy, że $x > 1$. W szczególności wyrażenie $x + 1$ jest dodatnie. Możemy zatem przez nie pomnożyć bez obawy o zmianę kierunku nierówności. Otrzymujemy wówczas

$$x - 1 < 4(x+1),$$

czyli

$$-3x < 5.$$

Stąd $x > -\frac{5}{3}$. Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (1, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) < 2$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek

$$x \in (1, +\infty) \cap (-\tfrac{5}{3}, +\infty) = (1, +\infty).$$

(d) Zauważmy, że dziedziną nierówności

$$\log_4(x+3) - \log_4(x-1) \geqslant \frac{1}{2}$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których spełnione są jednocześnie następujące dwa warunki

$$x+3>0 \quad \text{oraz} \quad x-1>0.$$

Dziedziną nierówności jest więc zbiór

$$D = (-3, +\infty) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania tej nierówności w określonej dziedzinie. Korzystając z własności logarytmów, przekształcamy lewą stronę i otrzymujemy

$$\log_4 \frac{x+3}{x-1} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Zapisując prawą stronę jako logarytm o podstawie 4, mamy

$$\log_4 \frac{x+3}{x-1} \geqslant \log_4 2.$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest większa od 1, możemy „opuścić logarytmy", zachowując kierunek nierówności:

$$\frac{x+3}{x-1} \geqslant 2.$$

Z określenia dziedziny D wiemy, że $x-1>0$. Możemy zatem pomnożyć obustronnie przez wyrażenie $x-1$ bez obawy o zmianę kierunku nierówności. Otrzymujemy wówczas

$$x+3 \geqslant 2(x-1),$$

czyli

$$-x \geqslant -5.$$

Stąd $x \leqslant 5$. Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (1, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_4(x+3) - \log_4(x-1) \geqslant \frac{1}{2}$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek

$$x \in (1, +\infty) \cap (-\infty, 5] = (1, 5].$$

(e) Zauważmy, że dziedziną nierówności

$$\log_7 \log_{\frac{1}{2}}(x+11) > 0$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których spełnione są jednocześnie następujące dwa warunki

$$x+11>0 \quad \text{oraz} \quad \log_{\frac{1}{2}}(x+11) > 0.$$

Pierwszy z nich oznacza, że $x > -11$. Drugi warunek wymaga osobnego rozpatrzenia. Zauważmy, że jest on równoważny warunkowi

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+11) > \log_{\frac{1}{2}} 1.$$

Stąd

$$x + 11 < 1,$$

bowiem podstawa logarytmu była mniejsza od 1 i musieliśmy odwrócić kierunek nierówności. Ostatecznie dziedziną rozważanej nierówności logarytmicznej jest zbiór

$$D = (-11, +\infty) \cap (-\infty, -10) = (-11, -10).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności

$$\log_7 \log_{\frac{1}{2}}(x + 11) > 0$$

w określonej dziedzinie. Zapisując prawą stronę jako logarytm o podstawie 7, otrzymujemy

$$\log_7 \log_{\frac{1}{2}}(x + 11) > \log_7 1.$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest większa od 1, możemy „opuścić logarytmy", zachowując kierunek nierówności:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x + 11) > 1.$$

Ponownie wyrażamy prawą stronę w postaci logarytmu, tym razem o podstawie $\frac{1}{2}$. Otrzymujemy wówczas

$$\log_{\frac{1}{2}}(x + 11) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}.$$

Teraz, ze względu na to, że podstawa $\frac{1}{2}$ jest mniejsza od 1, przy opuszczaniu logarytmu należy odwrócić kierunek nierówności. W konsekwencji dostajemy nierówność liniową

$$x + 11 < \frac{1}{2},$$

której rozwiązaniem jest zbiór $x \in (-\infty, -\frac{21}{2})$. Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (-11, -10)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_7 \log_{\frac{1}{2}}(x + 11) > 0$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek

$$x \in (-11, -10) \cap (-\infty, -\tfrac{21}{2}) = (-11, -\tfrac{21}{2}).$$

(f) Zauważmy, że dziedziną nierówności

$$\log_8 \log_3 x \leqslant \frac{1}{3}$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, dla których spełnione są jednocześnie następujące dwa warunki

$$x > 0 \quad \text{oraz} \quad \log_3 x > 0.$$

Jedynie drugi warunek wymaga rozpatrzenia. Zauważmy, że jest on równoważny warunkowi

$$\log_3 x > \log_3 1.$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest większa od 1, możemy „opuścić logarytmy", zachowując kierunek nierówności: $x > 1$. Ostatecznie dziedziną rozważanej nierówności logarytmicznej jest zbiór

$$D = (0, +\infty) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty).$$

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności

$$\log_8 \log_3 x \leqslant \frac{1}{3}$$

w określonej dziedzinie. Zapisując prawą stronę jako logarytm o podstawie 8, otrzymujemy

$$\log_8 \log_3 x \leqslant \log_8 2.$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest większa od 1, możemy „opuścić logarytmy”, zachowując kierunek nierówności:

$$\log_3 x \leqslant 2.$$

Ponownie wyrażamy prawą stronę w postaci logarytmu, tym razem o podstawie 3. Otrzymujemy wówczas

$$\log_3 x \leqslant \log_3 9.$$

Raz jeszcze opuszczamy logarytmy i dostajemy

$$x \leqslant 9.$$

Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (1, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_8 \log_3 x \leqslant \frac{1}{3}$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek

$$x \in (1, +\infty) \cap (-\infty, 9] = (1, 9].$$

(g) Zauważmy, że dziedziną nierówności

$$\log_{\frac{1}{3}} x + 2\log_3 x < 3$$

jest zbiór $D = (0, +\infty)$. Przechodzimy teraz do rozwiązania rozważanej nierówności w określonej dziedzinie. Zauważmy, że

$$\log_{\frac{1}{3}} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = -\log_3 x.$$

Zatem nierówność przyjmuje postać

$$-\log_3 x + 2\log_3 x < 3,$$

czyli

$$\log_3 x < 3.$$

Zapisując prawą stronę jako logarytm o podstawie 3, otrzymujemy

$$\log_3 x < \log_3 27.$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest większa od 1, możemy „opuścić logarytmy”, zachowując kierunek nierówności. Otrzymujemy

$$x < 27.$$

Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (0, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_{\frac{1}{3}} x + 2\log_3 x < 3$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek

$$x \in (0, +\infty) \cap (-\infty, 27) = (0, 27).$$

(h) Zauważmy, że dziedziną nierówności

$$\log_{\frac{1}{5}} x + 2\log_5 x \geqslant 3$$

jest zbiór $D = (0, +\infty)$. Przechodzimy teraz do rozwiązania rozważanej nierówności w określonej dziedzinie. Zauważmy, że

$$\log_{\frac{1}{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 \frac{1}{5}} = -\log_5 x.$$

Zatem nierówność przyjmuje postać

$$-\log_5 x + 2\log_5 x \geqslant 3,$$

czyli

$$\log_5 x \geqslant 3.$$

Zapisując prawą stronę jako logarytm o podstawie 5, otrzymujemy

$$\log_5 x \geqslant \log_5 125.$$

Ponieważ podstawa logarytmu jest większa od 1, możemy „opuścić logarytmy", zachowując kierunek nierówności. Otrzymujemy

$$x \geqslant 125.$$

Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (0, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_{\frac{1}{5}} x + 2\log_5 x \geqslant 3$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x spełniających warunek

$$x \in (0, +\infty) \cap [125, +\infty) = [125, +\infty).$$

(i) Zauważmy, że dziedziną nierówności

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 > 0$$

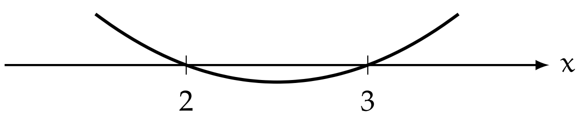
jest zbiór $D = (0, +\infty)$. Przechodzimy teraz do rozwiązania rozważanej nierówności w określonej dziedzinie. Wprowadzamy nową zmienną $t = \log_2 x$. Wówczas nierówność logarytmiczna przyjmuje postać nierówności kwadratowej względem t:

$$t^2 - 5t + 6 > 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Zatem $\sqrt{\Delta} = 1$. Pierwiastki trójmianu kwadratowego $t^2 - 5t + 6$ są więc równe

$$t_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \qquad t_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Z wykresu wielomianu $t^2 - 5t + 6$ odczytujemy, że nierówność $t^2 - 5t + 6 > 0$ jest spełniona dla $t \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.



Wracamy teraz do zmiennej x. Mamy alternatywę dwóch nierówności logarytmicznych

$$\log_2 x < 2 \quad \text{lub} \quad \log_2 x > 3.$$

Zatem

$$x < 4 \quad \text{lub} \quad x > 8.$$

Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (0, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 > 0$$

jest zbiór

$$x \in (0, 4) \cup (8, +\infty).$$

(j) Zauważmy, że dziedziną nierówności

$$\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 \geqslant 0$$

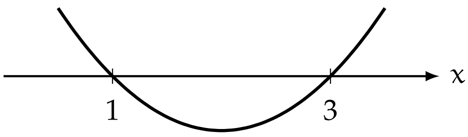
jest zbiór $D = (0, +\infty)$. Przechodzimy teraz do rozwiązania rozważanej nierówności w określonej dziedzinie. Wprowadzamy nową zmienną $t = \log_3 x$. Wówczas nierówność logarytmiczna przyjmuje postać nierówności kwadratowej względem t:

$$t^2 - 4t + 3 \geqslant 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$. Zatem $\sqrt{\Delta} = 2$. Pierwiastki trójmianu kwadratowego $t^2 - 4t + 3$ są więc równe

$$t_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \qquad t_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Z wykresu wielomianu $t^2 - 4t + 3$ odczytujemy, że nierówność $t^2 - 4t + 3 \geqslant 0$ jest spełniona dla $t \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.



Wracamy teraz do zmiennej x. Mamy alternatywę dwóch nierówności logarytmicznych

$$\log_3 x \leqslant 1 \quad \text{lub} \quad \log_3 x \geqslant 3.$$

Zatem

$$x \leqslant 3 \quad \text{lub} \quad x \geqslant 27.$$

Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (0, +\infty)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 \geqslant 0$$

jest zbiór

$$x \in (0, 3] \cup [27, +\infty).$$

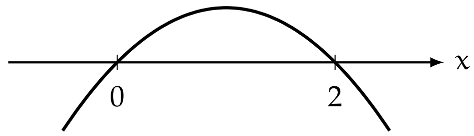
11.19. Zaczniemy od określenia dziedziny równania. Przypomnijmy, że funkcja logarytmiczna jest poprawnie określona jedynie dla argumentów dodatnich. Dodatkowo podstawa logarytmu również musi być dodatnia i różna od 1. W naszym przypadku dziedziną nierówności

$$\log_{(2x-x^2)}(2x+4) < 0$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, które jednocześnie spełniają następujące trzy warunki

$$2x+4>0, \qquad 2x-x^2>0, \qquad 2x-x^2 \neq 1.$$

Pierwszy warunek prowadzi do nierówności $x > -2$. Drugi warunek, po przekształceniu $2x - x^2 > 0$ do postaci $x(2-x) > 0$, daje rozwiązanie $x \in (0,2)$.



Trzeci warunek oznacza, że z dziedziny nierówności wykluczamy rozwiązania równania

$$2x - x^2 = 1.$$

Ponieważ $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, równanie to możemy przepisać jako

$$(x-1)^2 = 0.$$

A zatem jego rozwiązaniem jest $x = 1$. Ostatecznie, uwzględniając wszystkie trzy warunki, stwierdzamy, że dziedziną rozważanej nierówności jest zbiór

$$D = (0,1) \cup (1,2).$$

Zanim przejdziemy do rozwiązywania nierówności logarytmicznej zwróćmy jeszcze uwagę, że funkcja kwadratowa $2x - x^2$ swoją maksymalną wartość równą 1 przyjmuje dla $x = 1$. Oznacza to, że $0 < 2x - x^2 < 1$ dla każdego $x \in D$.

Przyjrzyjmy się teraz nierówności

$$\log_{(2x-x^2)}(2x+4) < 0$$

i zapiszmy jej prawą stronę za pomocą logarytmu:

$$\log_{(2x-x^2)}(2x+4) < \log_{(2x-x^2)} 1.$$

Z wcześniejszych rozważań wiemy, że dla dowolnego $x \in D$ wartość podstawy $2x - x^2$ jest ułamkiem z przedziału $(0,1)$. Zatem opuszczając logarytmy musimy pamiętać o zmianie kierunku nierówności. Otrzymujemy wówczas

$$2x+4>1,$$

skąd $x > -\frac{3}{2}$. Biorąc pod uwagę dziedzinę $D = (0,1) \cup (1,2)$, rozwiązaniem nierówności logarytmicznej

$$\log_{(2x-x^2)}(2x+4) < 0$$

jest zbiór

$$x \in (0,1) \cup (1,2).$$

11.20. Zaczniemy od określenia dziedziny równania. Przypomnijmy, że funkcja logarytmiczna jest poprawnie określona jedynie dla argumentów dodatnich. Dodatkowo podstawa logarytmu również musi być dodatnia i różna od 1. W naszym przypadku dziedziną nierówności

$$\log_x(x^3 - \frac{1}{4}x) \leqslant 1$$

jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x, które jednocześnie spełniają następujące trzy warunki

$$x > 0, \qquad x \neq 1, \qquad x^3 - \frac{1}{4}x > 0.$$

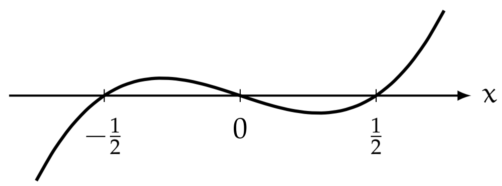
Jedynie trzeci warunek wymaga rozpatrzenia. Ponieważ

$$x^3 - \tfrac{1}{4}x = x(x^2 - \tfrac{1}{4}) = x(x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2}),$$

nierówność $x^3 - \frac{1}{4}x > 0$ jest równoważna nierówności

$$x(x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{2}) > 0.$$

Na podstawie wykresu wielomianu $x(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})$ możemy odczytać, że jej rozwiązaniem jest zbiór $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.



Ostatecznie, uwzględniając wszystkie trzy warunki, stwierdzamy, że dziedziną rozważanej nierówności jest zbiór

$$D = (\tfrac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty).$$

Przejdźmy teraz do rozwiązania nierówności

$$\log_x(x^3 - \frac{1}{4}x) \leqslant 1,$$

którą możemy zapisać w równoważny sposób jako

$$\log_x(x^3 - \frac{1}{4}x) \leqslant \log_x x.$$

W zależności od wartości podstawy rozważymy dwa przypadki.

Przypadek I: $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Wtedy opuszczając logarytmy będziemy zmieniać kierunek nierówności. Otrzymujemy

$$x^3 - \frac{1}{4}x \geqslant x.$$

Ponieważ

$$x^3 - \tfrac{5}{4}x = x(x^2 - \tfrac{5}{4}) = x(x - \tfrac{\sqrt{5}}{2})(x + \tfrac{\sqrt{5}}{2}),$$

powyższą nierówność możemy przepisać w postaci

$$x(x - \tfrac{\sqrt{5}}{2})(x + \tfrac{\sqrt{5}}{2}) \geqslant 0.$$

Zatem jej rozwiązaniem jest zbiór $x \in [-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. Zauważmy jeszcze, że $\sqrt{5} > 2$, więc $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$. Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku rozważamy jedynie te wartości x, które spełniają warunek $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, stwierdzamy, że z tej części nie otrzymamy żadnych rozwiązań.

Przypadek II: $x \in (1, +\infty)$. Tym razem opuszczając logarytmy nie będziemy zmieniać kierunek nierówności. Otrzymujemy

$$x^3 - \frac{1}{4}x \leqslant x.$$

Rozumując podobnie jak w Przypadku I stwierdzamy, że rozwiązaniem powyższej nierówności jest zbiór $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [0, \frac{\sqrt{5}}{2}]$. Biorąc pod uwagę, że w tym przypadku rozważamy jedynie te wartości x, które spełniają warunek $x \in (1, +\infty)$, ostatecznym rozwiązaniem tej części jest zbiór $x \in (1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.

Łącząc obydwa przypadki, stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności

$$\log_x(x^3 - \frac{1}{4}x) \leqslant 1$$

jest zbiór $x \in (1, \frac{\sqrt{5}}{2}]$.

Literatura

Bibliografia. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- E. Bańskowska, A. Cewe, D. Stankiewicz, *Egzamin wstępny na wyższe uczelnie. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 2002.
- N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne Spółka Akcyjna, Warszawa, 1998.
- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tomy 1*, PWN, 1985.
- B. Gdowski, E. Pluciński, *Zbiór zadań dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1979.
- T. Gronek. J. Magdziarz, *Testy z matematyki dla uczniów szkół średnich i kandydatów na studia z komentarzami u uwagami*, Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa, 2001.
- P. Foralewski, *Równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.
- R. J. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku: Matura 2002 - zbiór zadań, część II*, Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona Sp. z o.o., Łódź, 2001.
- K. Piszczek, *Funkcje – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.
- *Potęga*, https://pl.wikipedia.org/wiki/Pot%C4%99gowanie
- S. Zieleń, *Matematyka dla klasy III szkoły średniej*, Wydawnictwo Nowik, Opole, 2001.