Rozdział 10

Funkcje wymierne

Teoria

Funkcją wymierną nazywamy funkcję będącą ilorazem dwóch wielomianów, tj. funkcję postaci

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0},$$

gdzie $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_n, \ldots, a_1, a_0, b_m, \ldots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ przy czym $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór $\mathbb{R}$ z pominięciem tych liczb, dla których mianownik przyjmuje wartość zero.

Ułamkiem prostym nazywamy każdą funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{lub} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l},$$

gdzie $k, l \in \mathbb{N}$, $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $b^2 - 4c < 0$. Okazuje się, że każdą funkcję wymierną, której licznik ma stopień mniejszy niż mianownik, można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych. Przykładowo

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

$$\frac{x^5+x^2-1}{(x^2+1)^3(x+4)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^3}.$$

Jak widzimy, jeżeli w mianowniku funkcji wymiernej czynnik pojawia się w potędze n, to w rozkładzie na ułamki proste będzie występować dokładnie n odpowiadających mu składników z mianownikami w potęgach odpowiednio $1, 2, \ldots, n$.

Funkcją homograficzną nazywamy funkcję daną wzorem $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $ad - bc \neq 0$. Jeżeli $c = 0$, to wtedy $a \neq 0$ i $d \neq 0$ oraz

$$f(x) = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d};$$

w tym przypadku wykresem funkcji homograficznej jest linia prosta. Jeżeli natomiast $c \neq 0$, to zachodzą równości

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a(x+\frac{d}{c}) + b - \frac{ad}{c}}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(x+\frac{d}{c})};$$

w tym przypadku wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola o asymptocie pionowej $x = -\frac{d}{c}$ oraz asymptocie poziomej $y = \frac{a}{c}$.

Zadania

Zadanie 10.1. Rozwiąż równanie

(a) $1+\frac{1}{x}=x-\frac{5}{x}$,

(b) $x-\frac{4}{x}=5+\frac{2}{x}$,

(c) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{x+1}{x-3}$,

(d) $\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2}{x-1}$,

(e) $\frac{x+3}{x+2}-\frac{x-3}{x-2}=\frac{x^2}{x^2-4}+1$,

(f) $\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5$,

(g) $\frac{x}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x-2}=0$,

(h) $\frac{2x}{x^2-3x-4}-\frac{1}{x-4}=0$,

(i) $\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x-3}-\frac{1}{x+1}=0$.

(j) $\frac{x^2-2x-4}{x^2-5x+6}+\frac{1}{x-3}=0$.

Zadanie 10.2. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ znajdź liczbę rozwiązań równania

$$\frac{x-2}{x}=a+\frac{b}{x}.$$

Zadanie 10.3. Rozwiąż nierówność

(a) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\geqslant 0$,

(b) $\frac{4-x}{x-5}-\frac{1}{1-x}\leqslant 0$,

(c) $\frac{1}{x+2}>\frac{x+1}{x}$,

(d) $\frac{x+2}{x-2}<\frac{x-2}{x+2}$,

(e) $\frac{2x-5}{x^2-6x+8}\leqslant -1$,

(f) $\frac{5x-48}{x^2-8x+20}\geqslant -1$,

(g) $\frac{2}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2+2x+1}<0$,

(h) $\frac{3}{x^2+x-2}-\frac{2}{x^2-2x+1}>0$,

(i) $\frac{x+2}{x^2+5x+8}-\frac{x-8}{x^2-3x+4}\geqslant 0$,

(j) $\frac{x-1}{x^2-4x+9}-\frac{x-3}{x^2-5x+7}\leqslant 0$.

Zadanie 10.4. Niech funkcje $f, g\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ będą dane wzorami $f(x)=x+\frac{1}{x}$ oraz $g(x)=x^3+\frac{1}{x^3}$. Pokaż, że jeżeli dla pewnej liczby rzeczywistej a wartość $f(a)$ jest liczbą całkowitą, to $g(a)$ jest liczbą całkowitą parzystą.

Zadanie 10.5. Naszkicuj wykres funkcji homograficznej f, jeżeli

(a) $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$,

(b) $f(x)=\frac{x+3}{x-1}$,

(c) $f(x)=\frac{3x-6}{5-x}$,

(d) $f(x)=\frac{2x-9}{4-x}$.

Zadanie 10.6. Wykaż, że do wykresu funkcji $f\colon \mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{1\}$ zadanej wzorem $f(x)=\frac{x-5}{x-3}$ należą dokładnie cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych.

Zadanie 10.7. Rozłóż na sumę wielomianu i ułamków prostych daną funkcję wymierną

(a) $\dfrac{x+15}{x^2-25}$,

(b) $\dfrac{x-12}{x^2-16}$,

(c) $\dfrac{3x-3}{x^2-5x+6}$,

(d) $\dfrac{5x+10}{x^2+3x-4}$,

(e) $\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$,

(f) $\dfrac{x+5}{(x-1)^2}$,

(g) $\dfrac{8x^2+x+16}{(x-3)(x^2+4)}$,

(h) $\dfrac{3x+6}{(x-4)(x^2+2)}$,

(i) $\dfrac{x^3-4x^2+4x+4}{(x-2)(x-1)}$,

(j) $\dfrac{x^3+6x^2+5x+3}{(x+1)(x+4)}$.

Rozwiązania

10.1. (a) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim dwa wyrażenia wymierne: $\frac{1}{x}$ oraz $\frac{5}{x}$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę i otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{x} - x + \frac{5}{x} = 0.$$

Skąd

$$1 - x + \frac{6}{x} = 0.$$

Aby pozbyć się ułamka, mnożymy obustronnie przez x (pamiętając, że $x \neq 0$) i po uporządkowaniu wyrazów dostajemy równanie kwadratowe:

$$-x^2 + x + 6 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 5$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{-1+5}{-2} = -2 \in D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-1-5}{-2} = 3 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$1 + \frac{1}{x} = x - \frac{5}{x}$$

ma dwa rozwiązania: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 3$.

(b) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim dwa wyrażenia wymierne: $\frac{4}{x}$ oraz $\frac{2}{x}$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę i otrzymujemy

$$x - \frac{4}{x} - 5 - \frac{2}{x} = 0.$$

Skąd

$$x - 5 - \frac{6}{x} = 0.$$

Aby pozbyć się ułamka, mnożymy obustronnie przez x (pamiętając, że $x \neq 0$) i po uporządkowaniu wyrazów dostajemy równanie kwadratowe:

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 25 + 24 = 49$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 7$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{5+7}{2} = 6 \in D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5-7}{2} = -1 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$x - \frac{4}{x} = 5 + \frac{2}{x}$$

ma dwa rozwiązania: $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 6$.

(c) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x + 1$ oraz $x - 3$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $x + 1$ oraz $x - 3$ (pamiętając, że $x \neq -1$ oraz $x \neq 3$). Dostajemy

$$\frac{x-3}{x+1} \cdot (x+1)(x-3) = \frac{x+1}{x-3} \cdot (x+1)(x-3),$$

czyli

$$(x-3)(x-3) = (x+1)(x+1).$$

Stąd

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 2x + 1.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie liniowe

$$8x = 8,$$

którego rozwiązaniem jest $x = 1 \in D$.

Ostatecznie równanie wymierne

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+1}{x-3}$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = 1$.

(d) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x + 2$ oraz $x - 1$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $x+2$ oraz $x-1$ (pamiętając, że $x \neq -2$ oraz $x \neq 1$). Dostajemy

$$\frac{x-1}{x+2} \cdot (x+2)(x-1) = \frac{x+2}{x-1} \cdot (x+2)(x-1),$$

czyli

$$(x-1)(x-1) = (x+2)(x+2).$$

Stąd

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 4x + 4.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie liniowe

$$6x = 3,$$

którego rozwiązaniem jest $x = \frac{1}{2} \in D$.

Ostatecznie równanie wymierne

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2}{x-1}$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = \frac{1}{2}$.

(e) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x+2$, $x-2$ oraz x^2-4. Zauważmy, że trzeci z tych mianowników możemy rozpisać przy pomocy wzoru skróconego mnożenia: $x^2-4 = (x-2)(x+2)$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2-4 = (x-2)(x+2)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x-2)(x+2)$ (pamiętając, że $x \neq -2$ oraz $x \neq 2$). Dostajemy

$$\left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2}\right) \cdot (x-2)(x+2) = \left(\frac{x^2}{x^2-4} + 1\right) \cdot (x-2)(x+2),$$

czyli

$$(x+3)(x-2) - (x-3)(x+2) = x^2 + (x-2)(x+2).$$

Stąd

$$x^2 - 2x + 3x - 6 - (x^2 + 2x - 3x - 6) = x^2 + x^2 - 4.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie kwadratowe

$$2x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2 = 4 + 32 = 36$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 6$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{2+6}{4} = 2 \notin D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{2-6}{4} = -1 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4} + 1$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -1$.

(f) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x+1$, $x-1$ oraz x^2-1. Zauważmy, że trzeci z tych mianowników możemy rozpisać przy pomocy wzoru skróconego mnożenia: $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x-1)(x+1)$ (pamiętając, że $x\neq -1$ oraz $x\neq 1$). Dostajemy

$$\left(\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}\right)\cdot(x-1)(x+1)=\left(\frac{x^2+5}{x^2-1}-5\right)\cdot(x-1)(x+1),$$

czyli

$$3(x+1)-(4x-1)(x-1)=(x^2+5)-5(x-1)(x+1).$$

Stąd

$$3x+3-(4x^2-4x-x+1)=x^2+5-(5x^2-5).$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie liniowe

$$8x=8,$$

którego rozwiązaniem jest $x=1\notin D$. Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$\frac{3}{x-1}-\frac{4x-1}{x+1}=\frac{x^2+5}{x^2-1}-5$$

nie ma rozwiązań.

(g) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x\in\mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x-2$ oraz x^2-5x+6. Znajdziemy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego x^2-5x+6. Obliczamy wyróżnik: $\Delta=(-5)^2-4\cdot1\cdot6=25-24=1$. Stąd $\sqrt{\Delta}=1$, więc pierwiastki trójmianu x^2-5x+6 są postaci

$$x=\frac{5+1}{2}=3 \quad \text{oraz} \quad x=\frac{5-1}{2}=2.$$

Zapisując wielomian x^2-5x+6 w postaci iloczynowej $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, widzimy, że dziedziną równania jest zbiór $D=\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x-3)(x-2)$ (pamiętając, że $x\neq 2$ oraz $x\neq 3$). Dostajemy

$$\left(\frac{x}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x-2}\right)\cdot(x-3)(x-2)=0,$$

czyli

$$x-(x-3)=0.$$

Po uporządkowaniu dostajemy

$$3=0.$$

Oznacza to, że równanie wymierne

$$\frac{x}{x^2-5x+6}-\frac{1}{x-2}=0$$

nie ma rozwiązań.

(h) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x-4$ oraz x^2-3x-4. Znajdziemy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego x^2-3x-4. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9+16 = 25$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 5$, więc pierwiastki trójmianu x^2-3x-4 są postaci

$$x = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{3-5}{2} = -1.$$

Zapisując wielomian x^2-3x-4 w postaci iloczynowej $x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$, widzimy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x-4)(x+1)$ (pamiętając, że $x \neq -4$ oraz $x \neq 1$). Dostajemy

$$\left(\frac{2x}{x^2-3x-4}-\frac{1}{x-4}\right) \cdot (x-4)(x+1) = 0,$$

czyli

$$2x-(x+1)=0.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie liniowe

$$x = 1 \in D.$$

Oznacza to, że równanie wymierne

$$\frac{2x}{x^2-3x-4}-\frac{1}{x-4}=0$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = 1$.

(i) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x+1$ oraz x^2-2x-3. Znajdziemy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego x^2-2x-3. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4+12 = 16$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 4$, więc pierwiastki trójmianu x^2-2x-3 są postaci

$$x = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Zapisując wielomian x^2-2x-3 w postaci iloczynowej $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$, widzimy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x-3)(x+1)$ (pamiętając, że $x \neq -1$ oraz $x \neq 3$). Dostajemy

$$\left(\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x-3}-\frac{1}{x+1}\right) \cdot (x-3)(x+1) = 0,$$

czyli

$$x^2 - 2x - 1 - (x - 3) = 0.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie kwadratowe

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 1$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{3+1}{2} = 2 \in D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{3-1}{2} = 1 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x - 3} - \frac{1}{x+1} = 0$$

ma dwa rozwiązania: $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 2$.

(j) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x - 3$ oraz $x^2 - 5x + 6$. Znajdziemy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 6$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 1$, więc pierwiastki trójmianu $x^2 - 5x + 6$ są postaci

$$x = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Zapisując wielomian $x^2 - 5x + 6$ w postaci iloczynowej $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, widzimy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x-3)(x-2)$ (pamiętając, że $x \neq 2$ oraz $x \neq 3$). Dostajemy

$$\left(\frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x-3} \right) \cdot (x-3)(x-2) = 0,$$

czyli

$$x^2 - 2x - 4 + (x - 2) = 0.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie kwadratowe

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 1 + 24 = 25$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 5$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{1+5}{2} = 3 \notin D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{1-5}{2} = -2 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$\frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x-3} = 0$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -2$.

10.2. Zauważmy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mnożąc obydwie strony przez $x \neq 0$, otrzymujemy

$$x - 2 = ax + b,$$

skąd

$$(a-1)x = b + 2.$$

Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $a \neq 1$ oraz $b \neq -2$. Rozwiązanie to jest równe $x = \frac{b+2}{1-a}$. Jeżeli $a = 1$ i $b = -2$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; każda liczba $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest rozwiązaniem tego równania. Jeżeli natomiast $a = 1$ i $b \neq -2$ lub $a =\neq 1$ i $b = -2$, to równanie nie posiada rozwiązań.

10.3. Rozwiązywanie nierówności wielomianowych składa się z pięciu podstawowych kroków.

Krok 1. Najpierw wyznaczamy dziedzinę nierówności, czyli określamy zbiór $x \in \mathbb{R}$, dla których nierówność ma sens.

Krok 2. Następnie porządkujemy nierówność, przenosząc wszystkie wyrażenia na jedną stronę tak, aby po drugiej stronie znajdowało się zero. Ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika, a następnie dodajemy lub odejmujemy odpowiednie wyrażenia.

Krok 3. Rozkładamy licznik i mianownik na czynniki: liniowe lub kwadratowe. W przypadku czynników kwadratowych, wybieramy tylko te, które są nierozkładalne (tj. mają ujemny wyróżnik i nie posiadają pierwiastków rzeczywistych).

Krok 4. Zamieniamy wyrażenie wymierne na wielomian. Można to zrobić na kilka sposobów. Jednym z nich jest zauważenie, że iloraz i iloczyn dwóch liczb mają zawsze ten sam znak (choć ich wartości mogą się oczywiście różnić).

Krok 5. Mając wielomian w postaci iloczynowej, sporządzamy schematyczny wykres wyrażenia i na jego podstawie odczytujemy rozwiązanie nierówności, pamiętając o ograniczeniach wynikających z dziedziny.

Przejdziemy teraz do konkretnych przykładów.

(a) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x - 1$ oraz $x - 3$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = 1$ oraz $x = 3$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x-3)(x-1)$. Stąd

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{x-3}{(x-1)(x-3)} + \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}.$$

Nierówność

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \geqslant 0$$

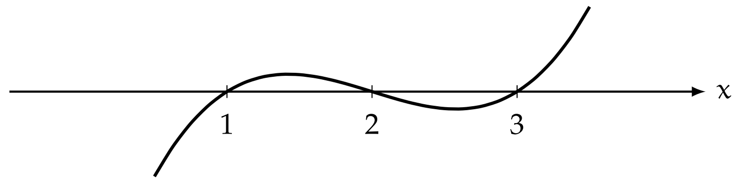
jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)} \geqslant 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$2(x-2)(x-1)(x-3) \geqslant 0.$$

Wykres funkcji $2(x-2)(x-1)(x-3)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$2(x-2)(x-1)(x-3) \geqslant 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in [1,2] \cup [3,+\infty).$$

Uwzględniając dziedzinę pierwotnej nierówności wymiernej

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \geqslant 0$$

stwierdzamy, że jej rozwiązaniami są te liczby x, które spełniają warunek

$$x \in (1,2] \cup (3,+\infty).$$

(b) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x-5$ oraz $1-x$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x=5$ oraz $x=1$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x-5)(x-1)$. Stąd

$$\begin{aligned}\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} &= \frac{(4-x)(x-1)}{(x-5)(x-1)} + \frac{x-5}{(x-5)(x-1)} \\ &= \frac{(4x-4-x^2+x)+x-5}{(x-5)(x-1)} = \frac{-x^2+6x-9}{(x-5)(x-1)}.\end{aligned}$$

Ponieważ $x^2-6x+9=(x-3)^2$, nierówność

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} \leqslant 0$$

jest równoważna nierówności

$$-\frac{(x-3)^2}{(x-5)(x-1)} \leqslant 0,$$

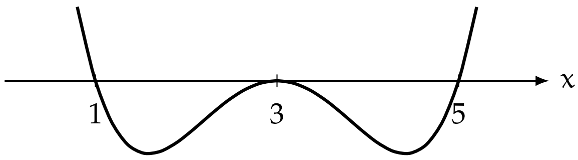
która po pomnożeniu obu stron przez -1 przyjmuje postać

$$\frac{(x-3)^2}{(x-5)(x-1)} \geqslant 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-3)^2(x-5)(x-1) \geqslant 0.$$

Wykres funkcji $(x-3)^2(x-5)(x-1)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x-3)^2(x-5)(x-1) \geqslant 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, 1] \cup \{3\} \cup [5, +\infty).$$

Uwzględniając dziedzinę pierwotnej nierówności wymiernej

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} \leqslant 0$$

stwierdzamy, że jej rozwiązaniami są te liczby x, które spełniają warunek

$$x \in (-\infty, 1) \cup \{3\} \cup (5, +\infty).$$

(c) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x+2$ oraz x. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x=-2$ oraz $x=0$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x(x+2)$. Stąd

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2} - \frac{x+1}{x} &= \frac{x}{x(x+2)} - \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)} \\ &= \frac{x-(x^2+2x+x+2)}{x(x+2)} = \frac{-x^2-2x-2}{x(x+2)}.\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że licznik tego ułamka jest trójmianem kwadratowym, który nie ma pierwiastków rzeczywistych, ponieważ jego wyróżnik (delta) jest ujemny $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4 - 8 = -4 < 0$. Nierówność

$$\frac{1}{x+2} > \frac{x+1}{x}$$

jest równoważna nierówności

$$-\frac{x^2+2x+2}{x(x+2)} > 0,$$

która po pomnożeniu obu stron przez -1 przyjmuje postać

$$\frac{x^2+2x+2}{x(x+2)} < 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$x(x+2)(x^2+2x+2) < 0.$$

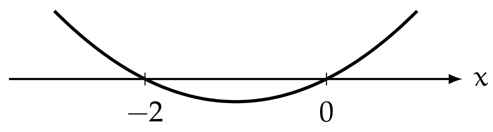
Wiemy już, że trójmian kwadratowy x^2+2x+2 nie ma pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, ramiona paraboli, która jest wykresem tego trójmianu, skierowane są ku górze. Oznacza to, że $x^2 + 2x + 2 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności

$$x(x+2)(x^2+2x+2) < 0$$

przez wyrażenie $x^2 + 2x + 2$, które jest zawsze dodatnie, co nie wpływa na kierunek nierówności. (Zazwyczaj *nie* dzielimy nierówności przez wyrażenia zawierające zmienną, ponieważ nie mamy pewności, czy są one dodatnie – w przeciwnym razie konieczna byłaby zmiana znaku nierówności.) Dostajemy

$$x(x+2) < 0$$

Wykres funkcji $x(x+2)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$x(x+2) < 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (0, 2).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D, tzn.

$$(0, 2) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{1}{x+2} > \frac{x+1}{x}$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

(d) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x - 2$ oraz $x + 2$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = -2$ oraz $x = 2$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+2)(x-2)$. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} &= \frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x^2+4x+4-(x^2-4x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{8x}{(x+2)(x-2)}. \end{aligned}$$

Nierówność

$$\frac{x+2}{x-2} < \frac{x-2}{x+2}$$

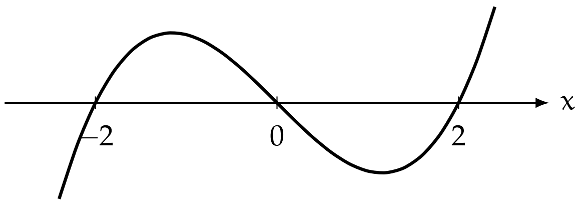
jest równoważna nierówności

$$\frac{8x}{(x+2)(x-2)} < 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$8x(x+2)(x-2) < 0.$$

Wykres funkcji $x(x+2)(x-2)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$8x(x+2)(x-2) < 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D, tzn.

$$(-\infty, -2) \cup (0, 2) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} \leqslant 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

(e) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występuje w niej wyrażenie wymierne o mianowniku postaci: $x^2 - 6x + 8$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 2$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{6+2}{2} = 4 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{6-2}{2} = 2.$$

Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = 2$ oraz $x = 4$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x^2 - 6x + 8$. Stąd

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+8} + 1 = \frac{2x-5}{x^2-6x+8} + \frac{x^2-6x+8}{x^2-6x+8} = \frac{x^2-4x+3}{x^2-8x+20}.$$

Rozłóżmy teraz trójmian kwadratowy $x^2 - 4x + 3$ na czynniki. W tym celu obliczamy jego wyróżnik: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 2$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{4-2}{2} = 1.$$

W konsekwencji $x^2-6x+8 = (x-1)(x-3)$. Ponieważ wcześniej wyznaczyliśmy pierwiastki trójmianu $x^2 - 6x + 8$, którymi są liczby 2 oraz 4, jego postać iloczynowa to: $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Nierówność

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+8} \leqslant -1$$

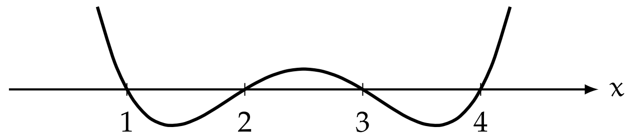
jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4) \leqslant 0.$$

Wykres funkcji $(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4) \leqslant 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in [1,2] \cup [3,4].$$

Uwzględniając dziedzinę pierwotnej nierówności wymiernej

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+8} \leqslant -1$$

stwierdzamy, że jej rozwiązaniami są te liczby x, które spełniają warunek

$$x \in [1,2) \cup [3,4).$$

(f) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występuje w niej wyrażenie wymierne o mianowniku postaci: $x^2-8x+20$. Zwróćmy uwagę, że wielomian $x^2-8x+20$ nie posiada pierwiastków rzeczywistych, ponieważ jego wyróżnik (delta) jest ujemny $\Delta = (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 20 = 64-80 = -16$. Oznacza to, że nierówność wymierna jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a więc $D = \mathbb{R}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x^2-8x+10$. Stąd

$$\frac{5x-48}{x^2-8x+20}+1 = \frac{5x-48}{x^2-8x+20}+\frac{x^2-8x+20}{x^2-8x+20} = \frac{x^2-3x-28}{x^2-8x+20}.$$

Przedstawmy teraz trójmian kwadratowy $x^2-3x-28$ w postaci iloczynowej. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(-28) = 9+112 = 121$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 11$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{3+11}{2} = 7 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{3-11}{2} = -4.$$

W konsekwencji $x^2-3x-28 = (x-7)(x+4)$. Nierówność

$$\frac{5x-48}{x^2-8x+20} \geqslant -1$$

jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{(x-7)(x+4)}{x^2-8x+20} \geqslant 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-7)(x+4)(x^2-8x+20) \geqslant 0.$$

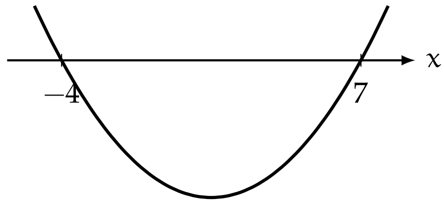
Wiemy już, że trójmian kwadratowy $x^2-8x+20$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, ramiona paraboli, która jest wykresem tego trójmianu, skierowane są ku górze. Oznacza to, że $x^2 - 8x + 20 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności

$$(x-7)(x+4)(x^2-8x+20) \geqslant 0$$

przez wyrażenie $x^2 - 8x + 20$, które jest zawsze dodatnie, co nie wpływa na kierunek nierówności. Dostajemy

$$(x-7)(x+4) \geqslant 0.$$

Wykres funkcji $(x-7)(x+4)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x-7)(x+4) \geqslant 0.$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, -4] \cup [7, +\infty).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D, tzn.

$$(-\infty, -4] \cup [7, +\infty) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{5x-48}{x^2-8x+20} \geqslant -1$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

(g) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x^2 - x - 2$ oraz $x^2 + 2x + 1$. Zauważmy, że drugi z tych trójmianów możemy zapisać przy pomocy wzoru skróconego mnożenia: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Aby rozłożyć trójmian $x^2 - x - 2$ na czynniki liniowe obliczamy jego wyróżnik: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 3$. Pierwiastki trójmianu $x^2 - x - 2$ mają postać

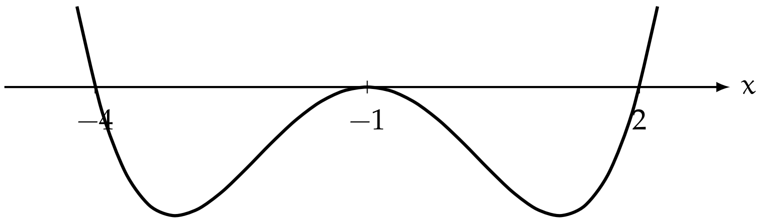
$$x = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{1-3}{2} = -1.$$

Zatem trójmian $x^2 - x - 2$ rozkłada się na iloczyn: $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = -1$ oraz $x = 2$, ponieważ są to pierwiastki obydwu mianowników, dla których wyrażenia wymierne tracą sens (dzielenie przez zero). Zatem dziedziną nierówności jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+1)^2(x-2)$. Stąd

$$\begin{aligned}\frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2+2x+1} &= \frac{2}{(x+1)(x-2)} - \frac{1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2(x+1)}{(x+1)^2(x-2)} - \frac{x-2}{(x+1)^2(x-2)} \\ &= \frac{x+4}{(x+1)^2(x-2)}.\end{aligned}$$

Nierówność
$$\frac{2}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2+2x+1}<0$$
jest zatem równoważna nierówności
$$\frac{x+4}{(x+1)^2(x-2)}<0.$$
Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:
$$(x+4)(x+1)^2(x-2)<0.$$
Wykres funkcji $(x+4)(x+1)^2(x-2)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej
$$(x+4)(x+1)^2(x-2)<0.$$
są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek
$$x \in (-4,-1) \cup (-1,2).$$
Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D, tzn.
$$(-4,-1) \cup (-1,2) \subseteq D,$$
stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej
$$\frac{2}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2+2x+1}<0$$
jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

(h) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: x^2+x-2 oraz x^2-2x+1. Zauważmy, że drugi z tych trójmianów możemy zapisać przy pomocy wzoru skróconego mnożenia: $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Aby rozłożyć trójmian x^2+x-2 na czynniki liniowe obliczamy jego wyróżnik: $\Delta = 1^2-4\cdot 1\cdot(-2)=1+8=9$. Stąd $\sqrt{\Delta}=3$. Pierwiastki trójmianu x^2+x-2 mają postać
$$x=\frac{-1+3}{2}=1 \quad \text{oraz} \quad x=\frac{-1-3}{2}=-2.$$
Zatem trójmian x^2-x-2 rozkłada się na iloczyn: $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x=1$ oraz $x=-2$, ponieważ są to pierwiastki obydwu mianowników, dla których wyrażenia wymierne tracą sens (dzielenie przez zero). Zatem dziedziną nierówności jest zbiór $D=\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x-1)^2(x+2)$. Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-2x+1} &= \frac{3}{(x-1)(x+2)} - \frac{2}{(x-1)^2} \\
&= \frac{3(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} \\
&= \frac{x-7}{(x-1)^2(x+2)}.
\end{aligned}$$

Nierówność

$$\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-2x+1} > 0$$

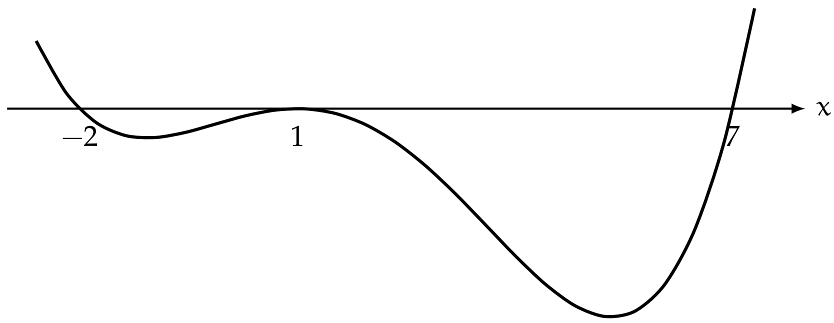
jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{x-7}{(x-1)^2(x+2)} > 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-7)(x-1)^2(x+2) > 0.$$

Wykres funkcji $(x-7)(x-1)^2(x+2)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x-7)(x-1)^2(x+2) > 0.$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, -2) \cup (7, +\infty).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D, tzn.

$$(-\infty, -2) \cup (7, +\infty) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-2x+1} > 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

(i) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: x^2+5x+8 oraz x^2-3x+4. Zwróćmy uwagę, że żaden z powyższych trójmianów nie posiada pierwiastków rzeczywistych, ponieważ ich wyróżnik (delta) są ujemne: $\Delta_1 = 5^2-4\cdot 1\cdot 8 = 25-40 = -15$ oraz $\Delta_2 = (-3)^2-4\cdot 1\cdot 4 = 9-16 = -7$. Oznacza to, że nierówność wymierna jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a więc $D = \mathbb{R}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)$. Stąd

$$\begin{aligned}
&\frac{x+2}{x^2+5x+8} - \frac{x-8}{x^2-3x+4} \\
&\quad = \frac{(x+2)(x^2-3x+4)}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)} - \frac{(x-8)(x^2+5x+8)}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)} \\
&\quad = \frac{x^3-3x^2+4x+2x^2-6x+8-(x^3+5x^2+8x-8x^2-40x-64)}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)} \\
&\quad = \frac{2x^2+30x+72}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)}.
\end{aligned}$$

Przedstawmy teraz trójmian kwadratowy $2x^2+30x+72$ w postaci iloczynowej. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 30^2-4\cdot 2\cdot 72 = 900-576 = 324$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 18$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{-30+18}{4} = -3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-30-18}{4} = -12.$$

W konsekwencji $2x^2+30x+72 = 2(x+12)(x+3)$. Nierówność

$$\frac{x+2}{x^2+5x+8} - \frac{x-8}{x^2-3x+4} \geqslant 0$$

jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{2(x+12)(x+3)}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)} \geqslant 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$2(x+12)(x+3)(x^2+5x+8)(x^2-3x+4) \geqslant 0.$$

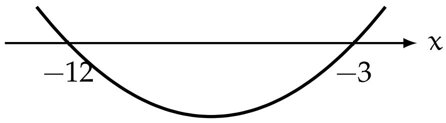
Wiemy już, że trójmiany kwadratowe x^2+5x+8 oraz x^2-3x+4 nie mają pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ współczynniki przy najwyższych potęgach są dodatnie, ramiona paraboli, które są wykresami tych trójmianów, skierowane są ku górze. Oznacza to, że $x^2+5x+8 > 0$ oraz $x^2-3x+4 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności

$$2(x+12)(x+3)(x^2+5x+8)(x^2-3x+4) \geqslant 0$$

przez iloczyn $(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)$, który jest zawsze dodatni. Dostajemy

$$2(x+12)(x+3) \geqslant 0.$$

Wykres funkcji $(x+12)(x+3)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$2(x+12)(x+3) \geqslant 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, -12] \cup [-3 + \infty).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D, tzn.

$$(-\infty, -12] \cup [-3 + \infty) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{x+2}{x^2+5x+8} - \frac{x-8}{x^2-3x+4} \geqslant 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

(j) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x^2 - 4x + 9$ oraz $x^2 - 5x + 7$. Zwróćmy uwagę, że żaden z powyższych trójmianów nie posiada pierwiastków rzeczywistych, ponieważ ich wyróżnik (delta) są ujemne: $\Delta_1 = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 16 - 36 = -20$ oraz $\Delta_2 = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 25 - 28 = -3$. Oznacza to, że nierówność wymierna jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a więc $D = \mathbb{R}$. Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x^2 - 4x + 9)(x^2 - 5x + 7)$. Stąd

$$\begin{aligned}
&\frac{x-1}{x^2-4x+9} - \frac{x-3}{x^2-5x+7} \\
&\quad = \frac{(x-1)(x^2-5x+7)}{(x^2-4x+9)(x^2-5x+7)} - \frac{(x-3)(x^2-4x+9)}{(x^2-4x+9)(x^2-5x+7)} \\
&\quad = \frac{x^3-5x^2+7x-x^2+5x-7-(x^3-4x^2+9x-3x^2+12x-27)}{(x^2-4x+9)(x^2-5x+7)} \\
&\quad = \frac{x^2-9x+20}{(x^2-4x+9)(x^2-5x+7)}.
\end{aligned}$$

Przedstawmy teraz trójmian kwadratowy $x^2 - 9x + 20$ w postaci iloczynowej. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 1$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{9+1}{2} = 5 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{9-1}{2} = 4.$$

W konsekwencji $x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$. Nierówność

$$\frac{x-1}{x^2-4x+9} - \frac{x-3}{x^2-5x+7} \leqslant 0$$

jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{(x-4)(x-5)}{(x^2-4x+9)(x^2-5x+7)} \leqslant 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-4)(x-5)(x^2-4x+9)(x^2-5x+7) \leqslant 0.$$

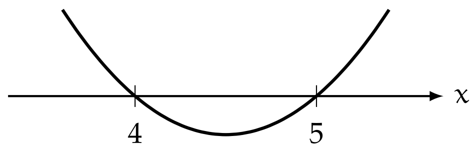
Wiemy już, że trójmiany kwadratowe x^2-4x+9 oraz $x^2-5x+7)$ nie mają pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ współczynniki przy najwyższych potęgach są dodatnie, ramiona paraboli, które są wykresami tych trójmianów, skierowane są ku górze. Oznacza to, że $x^2-4x+9>0$ oraz $x^2-5x+7)>0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności

$$(x-4)(x-5)(x^2-4x+9)(x^2-5x+7) \leqslant 0$$

przez iloczyn $(x^2-4x+9)(x^2-5x+7)$, który jest zawsze dodatni. Dostajemy

$$(x-4)(x-5) \leqslant 0.$$

Wykres funkcji $(x-4)(x-5)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x-4)(x-5) \leqslant 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in [4,5].$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D, tzn.

$$[4,5] \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{x-1}{x^2-4x+9} - \frac{x-3}{x^2-5x+7} \leqslant 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

10.4. Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy

$$\begin{aligned} g(x) = x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)-3\right] \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right] = f(x)[f^2(x)-3]. \end{aligned}$$

Jeżeli zatem dla pewnej liczby a wartość $f(a)$ jest całkowita, to $g(a) \in \mathbb{Z}$. Jeżeli ponadto $f(a)$ jest liczbą parzystą, to $g(a) = f(a)[f^2(a)-3]$ jest również liczbą parzystą. Z drugiej strony, jeżeli $f(a)$ jest liczbą nieparzystą, to $f^2(a)-3$ jest liczbą parzystą i w konsekwencji parzyste jest również $g(a)$.

10.6. Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mamy

$$f(x) = \frac{x-5}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} - \frac{2}{x-3} = 1 - \frac{2}{x-3}.$$

Załóżmy, że punkt $(a, f(a))$ leżący na wykresie funkcji f jest taki, że $a, f(a) \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$f(a) - 1 = -\frac{2}{a-3} \in \mathbb{Z}.$$

Oznacza to, że $(a-3)|2$. Stąd $a - 3 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ i w konsekwencji $a \in \{1, 2, 4, 5\}$. A zatem jeżeli punkt $(a, f(a))$ z wykresu funkcji f ma obydwie współrzędne całkowite, to a jest jedną z czterech liczb $1, 2, 4, 5$. Innymi słowy do wykresu funkcji f należą co najwyżej cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych. Łatwo sprawdzić, że w każdym z tych czterech przypadków otrzymujemy punkt $(a, f(a))$ o obydwu współrzędnych całkowitych. Mamy bowiem $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(4) = -1$ oraz $f(5) = 0$. Wykazaliśmy więc, że do wykresu funkcji f należą dokładnie cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych.

10.7. (a) Najpierw zauważmy, że mianownik ułamka

$$\frac{x+15}{x^2-25}$$

można rozłożyć na iloczyn dwóch czynników liniowych: $(x-5)(x+5)$. Wobec tego dany ułamek możemy zapisać w postaci ułamków prostych

$$\frac{x+15}{(x-5)(x+5)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-5)(x+5)$ i dostajemy

$$x + 15 = A(x+5) + B(x-5).$$

W tym miejscu możemy postąpić na różne sposoby. Jedną z metod jest uporządkowanie prawej strony i porównanie współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x. My jednak wybierzemy prostsze podejście – podstawimy do powyższej równości odpowiednie wartości x. Warto zauważyć, że dla $x = 5$ zeruje się czynnik $(x-5)$, a dla $x = -5$ – czynnik $(x+5)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x = 5 \quad &\to \quad 5 + 15 = A(5+5) + B(5-5), \\ x = -5 \quad &\to \quad -5 + 15 = A(-5+5) + B(-5-5). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$20 = 10A \quad \text{oraz} \quad 10 = -10B,$$

skąd wynika, że $A = 2$ oraz $B = -1$. Podsumowując, mamy

$$\frac{x+15}{(x-5)(x+5)} = \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+5}.$$

(b) Najpierw zauważmy, że mianownik ułamka

$$\frac{x-12}{x^2-16}$$

można rozłożyć na iloczyn dwóch czynników liniowych: $(x-4)(x+4)$. Wobec tego dany ułamek możemy zapisać w postaci ułamków prostych

$$\frac{x-12}{x^2-16} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-4)(x+4)$ i dostajemy

$$x - 12 = A(x+4) + B(x-4).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = 4$ zeruje się czynnik $(x-4)$, a dla $x = -4$ – czynnik $(x+4)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x = 4 \quad &\to \quad 4 - 12 = A(4+4) + B(4-4), \\ x = -4 \quad &\to \quad -4 - 12 = A(-4+4) + B(-4-4). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$-8 = 8A \quad \text{oraz} \quad -16 = -8B,$$

skąd wynika, że $A = -1$ oraz $B = 2$. Podsumowując, mamy

$$\frac{x-12}{x^2-16} = -\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x+4}.$$

(c) Zaczniemy od rozłożenia mianownika ułamka

$$\frac{3x-3}{x^2-5x+6},$$

czyli trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 6$ na czynniki. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 1$, więc pierwiastki trójmianu $x^2 - 5x + 6$ są postaci

$$x = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Zapisując wielomian x^2-5x+6 w postaci iloczynowej $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$, widzimy, że dany ułamek możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{3x-3}{x^2-5x+6} = \frac{3x-3}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-3)(x-2)$ i dostajemy

$$3x - 3 = A(x-2) + B(x-3).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = 2$ zeruje się czynnik $(x-2)$, a dla $x = 3$ – czynnik $(x-3)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x = 2 \quad &\to \quad 3 \cdot 2 - 3 = A(2-2) + B(2-3), \\ x = 3 \quad &\to \quad 3 \cdot 3 - 3 = A(3-2) + B(3-3). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$3 = -B \quad \text{oraz} \quad 6 = A,$$

skąd wynika, że $A = 6$ oraz $B = -3$. Podsumowując, mamy

$$\frac{3x-3}{x^2-5x+6} = \frac{6}{x-3} - \frac{3}{x-2}.$$

(d) Zaczniemy od rozłożenia mianownika ułamka

$$\frac{5x+10}{x^2+3x-4},$$

czyli trójmianu kwadratowego x^2+3x-4 na czynniki. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 5$, więc pierwiastki trójmianu x^2+3x-4 są postaci

$$x = \frac{-3+5}{2} = 1 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

Zapisując wielomian x^2+3x-4 w postaci iloczynowej $x^2+3x-4 = (x-1)(x+4)$, widzimy, że dany ułamek możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{5x+10}{x^2+3x-4} = \frac{5x+10}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-1)(x+4)$ i dostajemy

$$5x + 10 = A(x+4) + B(x-1).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = -4$ zeruje się czynnik $(x+4)$, a dla $x = 1$ – czynnik $(x-1)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x = -4 \quad &\to \quad 5 \cdot (-4) + 10 = A(-4+4) + B(-4-1), \\ x = 1 \quad &\to \quad 5 \cdot 1 + 10 = A(1+4) + B(1-1). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$-10 = -5B \quad \text{oraz} \quad 15 = 5A,$$

skąd wynika, że $A = 3$ oraz $B = 2$. Podsumowując, mamy

$$\frac{5x+10}{x^2+3x-4} = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+4}.$$

(e) Ułamek

$$\frac{x+3}{(x+1)^2}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x+1)^2$ i dostajemy

$$x + 3 = A(x+1) + B.$$

Zauważmy, że dla $x = -1$ zeruje się czynnik $(x+1)$. Drugą wartość x możemy dobrać dowolnie, jednak warto wybrać taką, która uprości dalsze obliczenia. Na przykład, możemy przyjąć $x = 0$. Wówczas:

$$\begin{aligned} x = -1 \quad &\to \quad (-1) + 3 = A(-1+1) + B, \\ x = 0 \quad &\to \quad 0 + 3 = A(0+1) + B. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{aligned} B &= 2, \\ A + B &= 3, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $A = 1$ oraz $B = 2$. Podsumowując, mamy

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

(f) Ułamek

$$\frac{x+5}{(x-1)^2}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{x+5}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-1)^2$ i dostajemy

$$x + 5 = A(x-1) + B.$$

Zauważmy, że dla $x = 1$ zeruje się czynnik $(x-1)$. Drugą wartość x możemy dobrać dowolnie, jednak warto wybrać taką, która uprości dalsze obliczenia. Na przykład, możemy przyjąć $x = 0$. Wówczas:

$$\begin{aligned} x = 1 \quad &\rightarrow \quad 1 + 5 = A(1-1) + B, \\ x = 0 \quad &\rightarrow \quad 0 + 5 = A(0-1) + B. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{aligned} B &= 6, \\ B - A &= 5, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $A = 1$ oraz $B = 6$. Podsumowując, mamy

$$\frac{x+5}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2}.$$

(g) Zwróćmy uwagę, że trójmianu $x^2 + 4$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż jego wyróżnik (delta) jest ujemny: $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16$. Zatem Ułamek

$$\frac{8x^2 + x + 16}{(x-3)(x^2+4)}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{8x^2 + x + 16}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx + C}{x^2+4},$$

gdzie A, B oraz C są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-3)(x^2+4)$ i dostajemy

$$8x^2 + x + 16 = A(x^2+4) + (Bx + C)(x-3).$$

Zauważmy, że dla $x = 3$ zeruje się czynnik $(x-3)$. Pozostałe dwie wartości x możemy dobrać dowolnie, jednak warto wybrać takie, które uproszczą dalsze obliczenia. Na przykład, możemy przyjąć $x = 0$ oraz $x = 1$. Wówczas:

$$\begin{aligned}
x = 3 &\quad\to\quad 8 \cdot 3^2 + 3 + 16 = A(3^2 + 4) + (3 \cdot B + C)(3 - 3),\\
x = 0 &\quad\to\quad 8 \cdot 0^2 + 0 + 16 = A(0^2 + 4) + (0 \cdot B + C)(0 - 3),\\
x = 1 &\quad\to\quad 8 \cdot 1^2 + 1 + 16 = A(1^2 + 4) + (1 \cdot B + C)(1 - 3).
\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{aligned}
13A &= 91,\\
4A - 3C &= 16,\\
5A - 2B - 2C &= 25,
\end{aligned}$$

skąd wynika, że $A = 7$, $B = 1$ oraz $C = 4$. Podsumowując, mamy

$$\frac{8x^2 + x + 16}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{7}{x-3} + \frac{x+4}{x^2+4}.$$

(h) Zwróćmy uwagę, że trójmianu $x^2 + 2$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż jego wyróżnik (delta) jest ujemny: $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8$. Zatem Ułamek

$$\frac{3x + 6}{(x-4)(x^2+2)}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{3x + 6}{(x-4)(x^2+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx + C}{x^2+2},$$

gdzie A, B oraz C są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-4)(x^2+2)$ i dostajemy

$$3x + 6 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x - 4).$$

Zauważmy, że dla $x = 4$ zeruje się czynnik $(x-4)$. Pozostałe dwie wartości x możemy dobrać dowolnie, jednak warto wybrać takie, które uproszczą dalsze obliczenia. Na przykład, możemy przyjąć $x = 0$ oraz $x = 1$. Wówczas:

$$\begin{aligned}
x = 4 &\quad\to\quad 3 \cdot 4 + 6 = A(4^2 + 2) + (4 \cdot B + C)(4 - 4),\\
x = 0 &\quad\to\quad 3 \cdot 0 + 6 = A(0^2 + 2) + (0 \cdot B + C)(0 - 4),\\
x = 1 &\quad\to\quad 3 \cdot 1 + 6 = A(1^2 + 2) + (1 \cdot B + C)(1 - 4).
\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{aligned}
18A &= 18,\\
2A - 4C &= 6,\\
3A - 3B - 3C &= 9,
\end{aligned}$$

skąd wynika, że $A = 1$, $B = -1$ oraz $C = -1$. Podsumowując, mamy

$$\frac{3x + 6}{(x-4)(x^2+2)} = \frac{1}{x-4} - \frac{x+1}{x^2+2}.$$

Uwaga: Pozostałe dwa podpunkty różnią się od poprzednich tym, że tym razem stopień wielomianu w liczniku jest większy niż stopień mianownika. W związku z tym musimy najpierw podzielić wielomian w liczniku przez wielomian w mianowniku, aby wyodrębnić czynnik „całkowity". Operacja ta przypomina rozdzielanie ułamka niewłaściwego na część całkowitą i ułamek właściwy, na przykład:

$$\frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$$

lub

$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}.$$

(i) Rozważmy wyrażenie wymierne

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{(x-2)(x-1)}.$$

Korzystając ze schematu Hornera, w pierwszym kroku podzielimy wielomian $x^3 - 4x^2 + 4x + 4$ przez dwumian $x - 2$. Otrzymujemy

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & 4 \end{array}$$

Wynikiem tego dzielenia jest iloraz $Q_1(x) = x^2 - 2x$ oraz reszta $R_1(x) = 4$. Możemy więc zapisać $x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = (x-2)(x^2 - 2x) + 4$. W kolejnym kroku dzielimy wielomian $x^2 - 2x$ przez dwumian $x - 1$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

W wyniku tego dzielenia otrzymujemy iloraz $Q_2(x) = x - 1$ oraz resztę $R_2(x) = -1$. Zatem możemy zapisać: $x^2 - 2x = (x-1) - 1$. Podstawiając to do wcześniejszej równości, otrzymujemy

$$x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = (x-2)\left[(x-1)^2 - 1\right] + 4 = (x-2)(x-1)^2 - (x-2) + 4.$$

Stąd

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{(x-2)(x-1)} = (x-1) + \frac{6-x}{(x-2)(x-1)}.$$

Wyrażenie wymierne

$$\frac{6-x}{(x-2)(x-1)}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{6-x}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-2)(x-1)$ i dostajemy

$$6 - x = A(x-1) + B(x-2).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = 1$ zeruje się czynnik $(x-1)$, a dla $x = 2$ – czynnik $(x-2)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x = 1 \quad &\to \quad 6-1 = A(1-1) + B(1-2), \\ x = 2 \quad &\to \quad 6-2 = A(2-1) + B(2-2). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$5 = -B \quad \text{oraz} \quad 4 = A,$$

skąd wynika, że $A = 4$ oraz $B = -5$. Podsumowując, mamy

$$\frac{6-x}{(x-2)(x-1)} = \frac{4}{x-2} - \frac{5}{x-1}.$$

Ostatecznie

$$\frac{x^3-4x^2+4x+4}{(x-2)(x-1)} = x - 1 + \frac{4}{x-2} - \frac{5}{x-1}.$$

(j) Rozważmy wyrażenie wymierne

$$\frac{x^3+6x^2+5x+3}{(x+1)(x+4)}.$$

Korzystając ze schematu Hornera, w pierwszym kroku podzielimy wielomian x^3+6x^2+5x+3 przez dwumian $x+1$. Otrzymujemy

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 5 & 3 \\ -1 & & -1 & -5 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 0 & 3 \end{array}$$

Wynikiem tego dzielenia jest iloraz $Q_1(x) = x^2 + 5x$ oraz reszta $R_1(x) = 3$. Możemy więc zapisać $x^3+6x^2+5x+3 = (x+1)(x^2+5x)+3$. W kolejnym kroku dzielimy wielomian x^2+5x przez dwumian $x+4$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 5 & 0 \\ -4 & & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 \end{array}$$

W wyniku tego dzielenia otrzymujemy iloraz $Q_2(x) = x+1$ oraz resztę $R_2(x) = -4$. Zatem możemy zapisać: $x^2+5x = (x+4)(x+1)-4$. Podstawiając to do wcześniejszej równości, otrzymujemy

$$x^3+6x^2+5x+3 = (x+1)\big[(x+1)(x+4)-4\big]+3 = (x+1)^2(x+4) - 4(x+1) + 3.$$

Stąd

$$\frac{x^3+6x^2+5x+3}{(x+1)(x+4)} = (x+1) - \frac{4x+1}{(x+1)(x+4)}.$$

Wyrażenie wymierne

$$\frac{4x+1}{(x+1)(x+4)}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{4x+1}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x+1)(x+4)$ i dostajemy

$$4x+1 = A(x+4) + B(x+1).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x=-1$ zeruje się czynnik $(x+1)$, a dla $x=-4$ – czynnik $(x+4)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x=-1 &\quad \to \quad 4\cdot(-1)+1 = A(-1+4)+B(-1+1), \\ x=-4 &\quad \to \quad 4\cdot(-4)+1 = A(-4+4)+B(-4+1). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$-3 = 3A \quad \text{oraz} \quad -15 = -3B,$$

skąd wynika, że $A=-1$ oraz $B=5$. Podsumowując, mamy

$$\frac{4x+1}{(x+1)(x+4)} = -\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x+4}.$$

Ostatecznie

$$\frac{x^3+6x^2+5x+3}{(x+1)(x+4)} = x+1+\frac{1}{x+1} - \frac{5}{x+4}.$$

Literatura

<u>Bibliografia.</u> Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1994.
- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tomy 1*, PWN, 1985.
- J. Rutkowski, *Funkcje wymierne – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.
- J. Rutkowski, *Przekształcenia wykresów funkcji – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015
- R. J. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku. Matura 2002. Zbiór zadań*: *część* I, Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona Sp. z o.o., Łódź, 2001.
- S. Zieleń, *Matematyka dla klasy II szkoły średniej*, Wydawnictwo Nowik, Opole, 1997.