

FUNKCJE WYMIERNE

TEORIA

FUNKCJĄ WYMIERNĄ nazywamy funkcję będącą ilorazem dwóch wielomianów, tj. funkcję postaci

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0},$$

gdzie $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_n, \dots, a_1, a_0, b_m, \dots, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ przy czym $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór $\mathbb{R}$ z pominięciem tych liczb, dla których mianownik przyjmuje wartość zero.

UŁAMKIEM PROSTYM nazywamy każdą funkcję wymierną postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{lub} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l},$$

gdzie $k, l \in \mathbb{N}$, $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $b^2 - 4c < 0$. Okazuje się, że każdą funkcję wymierną, której licznik ma stopień mniejszy niż mianownik, można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych. Przykładowo

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1},$$

$$\frac{x^5+x^2-1}{(x^2+1)^3(x+4)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{(x+4)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^3}.$$

Jak widzimy, jeżeli w mianowniku funkcji wymiernej czynnik pojawia się w potęgze n , to w rozkładzie na ułamki proste będzie występować dokładnie n odpowiadających mu składników z mianownikami w potęgach odpowiednio $1, 2, \dots, n$.

FUNKCJĄ HOMOGRAFICZNĄ nazywamy funkcję daną wzorem $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $ad - bc \neq 0$. Jeżeli $c = 0$, to wtedy $a \neq 0$ i $d \neq 0$ oraz

$$f(x) = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d};$$

w tym przypadku wykresem funkcji homograficznej jest linia prosta. Jeżeli natomiast $c \neq 0$, to zachodzą równości

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a(x+\frac{d}{c})+b-\frac{ad}{c}}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(x+\frac{d}{c})};$$

w tym przypadku wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola o asymptocie pionowej $x = -\frac{d}{c}$ oraz asymptocie poziomej $y = \frac{a}{c}$.

ZADANIA

Zadanie 10.1. Rozwiąż równanie

(a) $1 + \frac{1}{x} = x - \frac{5}{x},$

(b) $x - \frac{4}{x} = 5 + \frac{2}{x},$

(c) $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+1}{x-3},$

(d) $\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2}{x-1},$

(e) $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4} + 1,$

(f) $\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5,$

(g) $\frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x-2} = 0,$

(h) $\frac{2x}{x^2-3x-4} - \frac{1}{x-4} = 0,$

(i) $\frac{x^2-2x-1}{x^2-2x-3} - \frac{1}{x+1} = 0.$

(j) $\frac{x^2-2x-4}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x-3} = 0.$

Zadanie 10.2. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ znajdź liczbę rozwiązań równania

$$\frac{x-2}{x} = a + \frac{b}{x}.$$

Zadanie 10.3. Rozwiąż nierówność

(a) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \geq 0,$

(b) $\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} \leq 0,$

(c) $\frac{1}{x+2} > \frac{x+1}{x},$

(d) $\frac{x+2}{x-2} < \frac{x-2}{x+2},$

(e) $\frac{2x-5}{x^2-6x+8} \leq -1,$

(f) $\frac{5x-48}{x^2-8x+20} \geq -1,$

(g) $\frac{2}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2+2x+1} < 0,$

(h) $\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-2x+1} > 0,$

(i) $\frac{x+2}{x^2+5x+8} - \frac{x-8}{x^2-3x+4} \geq 0,$

(j) $\frac{x-1}{x^2-4x+9} - \frac{x-3}{x^2-5x+7} \leq 0.$

Zadanie 10.4. Niech funkcje $f, g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ będą dane wzorami $f(x) = x + \frac{1}{x}$ oraz $g(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$. Pokaż, że jeżeli dla pewnej liczby rzeczywistej a wartość $f(a)$ jest liczbą całkowitą, to $g(a)$ jest liczbą całkowitą parzystą.

Zadanie 10.5. Naszkicuj wykres funkcji homograficznej f , jeżeli

(a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1},$

(c) $f(x) = \frac{3x-6}{5-x},$

(b) $f(x) = \frac{x+3}{x-1},$

(d) $f(x) = \frac{2x-9}{4-x}.$

Zadanie 10.6. Wykaż, że do wykresu funkcji $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ zadanej wzorem $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ należą dokładnie cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych.

Zadanie 10.7. Rozłóż na sumę wielomianu i ułamków prostych daną funkcję wymierną

(a) $\frac{x+15}{x^2-25},$

(f) $\frac{x+5}{(x-1)^2},$

(b) $\frac{x-12}{x^2-16},$

(g) $\frac{8x^2+x+16}{(x-3)(x^2+4)},$

(c) $\frac{3x-3}{x^2-5x+6},$

(h) $\frac{3x+6}{(x-4)(x^2+2)},$

(d) $\frac{5x+10}{x^2+3x-4},$

(i) $\frac{x^3-4x^2+4x+4}{(x-2)(x-1)},$

(e) $\frac{x+3}{(x+1)^2},$

(j) $\frac{x^3+6x^2+5x+3}{(x+1)(x+4)}.$

ROZWIĄZANIA

- 10.1. (a) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim dwa wyrażenia wymierne: $\frac{1}{x}$ oraz $\frac{5}{x}$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązywania równania w obrębie tej dziedziny. Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę i otrzymujemy

$$1 + \frac{1}{x} - x + \frac{5}{x} = 0.$$

Skąd

$$1 - x + \frac{6}{x} = 0.$$

Aby pozbyć się ułamka, mnożymy obustronnie przez x (pamiętając, że $x \neq 0$) i po uporządkowaniu wyrazów dostajemy równanie kwadratowe:

$$-x^2 + x + 6 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 1 + 24 = 25$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 5$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{-1+5}{-2} = -2 \in D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-1-5}{-2} = 3 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$1 + \frac{1}{x} = x - \frac{5}{x}$$

ma dwa rozwiązania: $x_1 = -2$ oraz $x_2 = 3$.

- (b) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim dwa wyrażenia wymierne: $\frac{4}{x}$ oraz $\frac{2}{x}$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązywania równania w obrębie tej dziedziny. Przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę i otrzymujemy

$$x - \frac{4}{x} - 5 - \frac{2}{x} = 0.$$

Skąd

$$x - 5 - \frac{6}{x} = 0.$$

Aby pozbyć się ułamka, mnożymy obustronnie przez x (pamiętając, że $x \neq 0$) i po uporządkowaniu wyrazów dostajemy równanie kwadratowe:

$$x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 25 + 24 = 49$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 7$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{5+7}{2} = 6 \in D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5-7}{2} = -1 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$x - \frac{4}{x} = 5 + \frac{2}{x}$$

ma dwa rozwiązania: $x_1 = -1$ oraz $x_2 = 6$.

- (c) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x + 1$ oraz $x - 3$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązywania równania w obrębie tej dziedziny. Aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $x + 1$ oraz $x - 3$ (pamiętając, że $x \neq -1$ oraz $x \neq 3$). Dostajemy

$$\frac{x-3}{x+1} \cdot (x+1)(x-3) = \frac{x+1}{x-3} \cdot (x+1)(x-3),$$

czyli

$$(x-3)(x-3) = (x+1)(x+1).$$

Stąd

$$x^2 - 6x + 9 = x^2 + 2x + 1.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie liniowe

$$8x = 8,$$

którego rozwiązaniem jest $x = 1 \in D$.

Ostatecznie równanie wymierne

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{x+1}{x-3}$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = 1$.

- (d) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x + 2$ oraz $x - 1$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązywania równania w obrębie tej dziedziny. Aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $x + 2$ oraz $x - 1$ (pamiętając, że $x \neq -2$ oraz $x \neq 1$). Dostajemy

$$\frac{x-1}{x+2} \cdot (x+2)(x-1) = \frac{x+2}{x-1} \cdot (x+2)(x-1),$$

czyli

$$(x-1)(x-1) = (x+2)(x+2).$$

Stąd

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + 4x + 4.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie liniowe

$$6x = -3,$$

którego rozwiązaniem jest $x = -\frac{1}{2} \in D$.

Ostatecznie równanie wymierne

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2}{x-1}$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -\frac{1}{2}$.

- (e) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x + 2$, $x - 2$ oraz $x^2 - 4$. Zauważmy, że trzeci z tych mianowników możemy rozpisać przy pomocy wzoru skróconego mnożenia: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązywania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x - 2)(x + 2)$ (pamiętając, że $x \neq -2$ oraz $x \neq 2$). Dostajemy

$$\left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2}\right) \cdot (x-2)(x+2) = \left(\frac{x^2}{x^2-4} + 1\right) \cdot (x-2)(x+2),$$

czyli

$$(x+3)(x-2) - (x-3)(x+2) = x^2 + (x-2)(x+2).$$

Stąd

$$x^2 - 2x + 3x - 6 - (x^2 + 2x - 3x - 6) = x^2 + x^2 - 4.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie kwadratowe

$$2x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 2 = 4 + 32 = 36$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 6$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{2+6}{4} = 2 \notin D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{2-6}{4} = -1 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$\frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4} + 1$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -1$.

- (f) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x + 1$, $x - 1$ oraz $x^2 - 1$. Zauważmy, że trzeci z tych mianowników możemy rozpisać przy pomocy wzoru skróconego mnożenia: $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Oznacza to, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. (Nie możemy bowiem dzielić przez zero!)

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x - 1)(x + 1)$ (pamiętając, że $x \neq -1$ oraz $x \neq 1$). Dostajemy

$$\left(\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1}\right) \cdot (x-1)(x+1) = \left(\frac{x^2+5}{x^2-1} - 5\right) \cdot (x-1)(x+1),$$

czyli

$$3(x+1) - (4x-1)(x-1) = (x^2+5) - 5(x-1)(x+1).$$

Stąd

$$3x+3 - (4x^2-4x-x+1) = x^2+5 - (5x^2-5).$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie liniowe

$$8x = 8,$$

którego rozwiązaniem jest $x = 1 \notin D$. Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$\frac{3}{x-1} - \frac{4x-1}{x+1} = \frac{x^2+5}{x^2-1} - 5$$

nie ma rozwiązań.

- (g) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x - 2$ oraz $x^2 - 5x + 6$. Znajdziemy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 6$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 1$, więc pierwiastki trójmianu $x^2 - 5x + 6$ są postaci

$$x = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Zapisując wielomian $x^2 - 5x + 6$ w postaci iloczynowej $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$, widzimy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x-3)(x-2)$ (pamiętając, że $x \neq 2$ oraz $x \neq 3$). Dostajemy

$$\left(\frac{x}{x^2-5x+6} - \frac{1}{x-2}\right) \cdot (x-3)(x-2) = 0,$$

czyli

$$x - (x-3) = 0.$$

Po uporządkowaniu dostajemy

$$3 = 0.$$

Oznacza to, że równanie wymierne

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} - \frac{1}{x - 2} = 0$$

nie ma rozwiązań.

- (h) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x - 4$ oraz $x^2 - 3x - 4$. Znajdziemy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 3x - 4$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 5$, więc pierwiastki trójmianu $x^2 - 3x - 4$ są postaci

$$x = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{3-5}{2} = -1.$$

Zapisując wielomian $x^2 - 3x - 4$ w postaci iloczynowej $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, widzimy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązywania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x - 4)(x + 1)$ (pamiętając, że $x \neq -4$ oraz $x \neq 1$). Dostajemy

$$\left(\frac{2x}{x^2 - 3x - 4} - \frac{1}{x - 4} \right) \cdot (x - 4)(x + 1) = 0,$$

czyli

$$2x - (x + 1) = 0.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie liniowe

$$x = 1 \in D.$$

Oznacza to, że równanie wymierne

$$\frac{2x}{x^2 - 3x - 4} - \frac{1}{x - 4} = 0$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = 1$.

- (i) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x + 1$ oraz $x^2 - 2x - 3$. Znajdziemy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 2x - 3$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 4$, więc pierwiastki trójmianu $x^2 - 2x - 3$ są postaci

$$x = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Zapisując wielomian $x^2 - 2x - 3$ w postaci iloczynowej $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$, widzimy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązywania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x - 3)(x + 1)$ (pamiętając, że $x \neq -1$ oraz $x \neq 3$). Dostajemy

$$\left(\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x - 3} - \frac{1}{x + 1} \right) \cdot (x - 3)(x + 1) = 0,$$

czyli

$$x^2 - 2x - 1 - (x - 3) = 0.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie kwadratowe

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 1$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{3+1}{2} = 2 \in D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{3-1}{2} = 1 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 2x - 3} - \frac{1}{x+1} = 0$$

ma dwa rozwiązania: $x_1 = 1$ oraz $x_2 = 2$.

- (j) Zanim przystąpimy do rozwiązywania równania, przyjrzyjmy się jego dziedzinie, czyli tym wartościom $x \in \mathbb{R}$, dla których równanie ma sens. Widzimy, że występują w nim wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x - 3$ oraz $x^2 - 5x + 6$. Znajdziemy teraz pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 6$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 1$, więc pierwiastki trójmianu $x^2 - 5x + 6$ są postaci

$$x = \frac{5+1}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5-1}{2} = 2.$$

Zapisując wielomian $x^2 - 5x + 6$ w postaci iloczynowej $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, widzimy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania równania w obrębie tej dziedziny. Zauważmy, że wspólnym mianownikiem wszystkich ułamków jest $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$. Dlatego, aby pozbyć się ułamków, mnożymy obustronnie przez $(x - 3)(x - 2)$ (pamiętając, że $x \neq 2$ oraz $x \neq 3$). Dostajemy

$$\left(\frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x - 3} \right) \cdot (x - 3)(x - 2) = 0,$$

czyli

$$x^2 - 2x - 4 + (x - 2) = 0.$$

Po uporządkowaniu dostajemy równanie kwadratowe

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1 = 1 + 24 = 25$. Jego pierwiastek to $\sqrt{\Delta} = 5$, więc rozwiązania mają postać

$$x = \frac{1+5}{2} = 3 \notin D \quad \text{oraz} \quad x = \frac{1-5}{2} = -2 \in D.$$

Stąd wniosek, że równanie wymierne

$$\frac{x^2 - 2x - 4}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x - 3} = 0$$

ma jedno rozwiązanie: $x_1 = -2$.

10.2. Zauważmy, że dziedziną równania jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mnożąc obydwie strony przez $x \neq 0$, otrzymujemy

$$x - 2 = ax + b,$$

skąd

$$(a - 1)x = b + 2.$$

Równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, gdy $a \neq 1$ oraz $b \neq -2$. Rozwiązanie to jest równe $x = \frac{b+2}{1-a}$. Jeżeli $a = 1$ i $b = -2$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; każda liczba $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest rozwiązaniem tego równania. Jeżeli natomiast $a = 1$ i $b \neq -2$ lub $a \neq 1$ i $b = -2$, to równanie nie posiada rozwiązań.

10.3. Rozwiązywanie nierówności wielomianowych składa się z pięciu podstawowych kroków.

- KROK 1.** Najpierw wyznaczamy dziedzinę nierówności, czyli określamy zbiór $x \in \mathbb{R}$, dla których nierówność ma sens.
- KROK 2.** Następnie porządkujemy nierówność, przenosząc wszystkie wyrażenia na jedną stronę tak, aby po drugiej stronie znajdowało się zero. Ułamki sprowadzamy do wspólnego mianownika, a następnie dodajemy lub odejmujemy odpowiednie wyrażenia.
- KROK 3.** Rozkładamy licznik i mianownik na czynniki: liniowe lub kwadratowe. W przypadku czynników kwadratowych, wybieramy tylko te, które są nierozkładalne (tj. mają ujemny wyróżnik i nie posiadają pierwiastków rzeczywistych).
- KROK 4.** Zamieniamy wyrażenie wymierne na wielomian. Można to zrobić na kilka sposobów. Jednym z nich jest zauważenie, że iloraz i iloczyn dwóch liczb mają zawsze ten sam znak (choć ich wartości mogą się oczywiście różnić).
- KROK 5.** Mając wielomian w postaci iloczynowej, sporządzamy schematyczny wykres wyrażenia i na jego podstawie odczytujemy rozwiązanie nierówności, pamiętając o ograniczeniach wynikających z dziedziny.

Przejdziemy teraz do konkretnych przykładów.

- (a) Zaczniemy od opisania dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x - 1$ oraz $x - 3$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = 1$ oraz $x = 3$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązywania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x - 3)(x - 1)$. Stąd

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} = \frac{x-3}{(x-1)(x-3)} + \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}.$$

Nierówność

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \geq 0$$

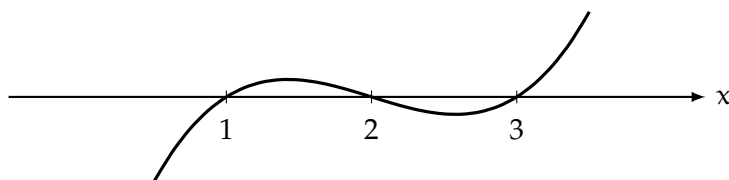
jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)} \geq 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$2(x-2)(x-1)(x-3) \geq 0.$$

Wykres funkcji $2(x-2)(x-1)(x-3)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$2(x-2)(x-1)(x-3) \geq 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in [1, 2] \cup [3, +\infty).$$

Uwzględniając dziedzinę pierwotnej nierówności wymiernej

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \geq 0$$

stwierdzamy, że jej rozwiązaniami są te liczby x , które spełniają warunek

$$x \in (1, 2] \cup (3, +\infty).$$

- (b) Zaczniemy od opisanie dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x-5$ oraz $1-x$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x=5$ oraz $x=1$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x-5)(x-1)$. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} &= \frac{(4-x)(x-1)}{(x-5)(x-1)} + \frac{x-5}{(x-5)(x-1)} \\ &= \frac{(4x-4-x^2+x) + x-5}{(x-5)(x-1)} = \frac{-x^2+6x-9}{(x-5)(x-1)}. \end{aligned}$$

Ponieważ $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, nierówność

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} \leq 0$$

jest równoważna nierówności

$$-\frac{(x-3)^2}{(x-5)(x-1)} \leq 0,$$

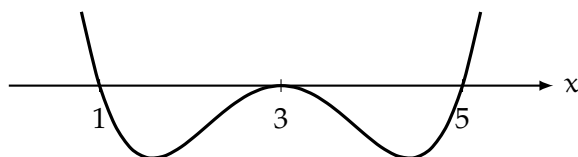
która po pomnożeniu obu stron przez -1 przyjmuje postać

$$\frac{(x-3)^2}{(x-5)(x-1)} \geq 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-3)^2(x-5)(x-1) \geq 0.$$

Wykres funkcji $(x-3)^2(x-5)(x-1)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x - 3)^2(x - 5)(x - 1) \geq 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, 1] \cup \{3\} \cup [5, +\infty).$$

Uwzględniając dziedzinę pierwotnej nierówności wymiernej

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} \leq 0$$

stwierdzamy, że jej rozwiązaniami są te liczby x , które spełniają warunek

$$x \in (-\infty, 1) \cup \{3\} \cup (5, +\infty).$$

- (c) Zaczniemy od opisanie dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x + 2$ oraz x . Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = -2$ oraz $x = 0$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x(x + 2)$. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+2} - \frac{x+1}{x} &= \frac{x}{x(x+2)} - \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+2)} \\ &= \frac{x - (x^2 + 2x + x + 2)}{x(x+2)} = \frac{-x^2 - 2x - 2}{x(x+2)}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że licznik tego ułamka jest trójmianem kwadratowym, który nie ma pierwiastków rzeczywistych, ponieważ jego wyróżnik (delta) jest ujemny $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4 - 8 = -4 < 0$. Nierówność

$$\frac{1}{x+2} > \frac{x+1}{x}$$

jest równoważna nierówności

$$-\frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)} > 0,$$

która po pomnożeniu obu stron przez -1 przyjmuje postać

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x(x+2)} < 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$x(x+2)(x^2 + 2x + 2) < 0.$$

Wiemy już, że trójmian kwadratowy $x^2 + 2x + 2$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potęgce jest dodatni, ramiona paraboli, która

jest wykresem tego trójkątnika, skierowane są ku górze. Oznacza to, że $x^2 + 2x + 2 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności

$$x(x+2)(x^2+2x+2) < 0$$

przez wyrażenie $x^2 + 2x + 2$, które jest zawsze dodatnie, co nie wpływa na kierunek nierówności. (Zazwyczaj *nie* dzielimy nierówności przez wyrażenia zawierające zmienną, ponieważ nie mamy pewności, czy są one dodatnie – w przeciwnym razie konieczna byłaby zmiana znaku nierówności.) Dostajemy

$$x(x+2) < 0$$

Wykres funkcji $x(x+2)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$x(x+2) < 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-2, 0).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D , tzn.

$$(-2, 0) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{1}{x+2} > \frac{x+1}{x}$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

- (d) Zaczniemy od opisu dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x-2$ oraz $x+2$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = -2$ oraz $x = 2$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x+2)(x-2)$. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} &= \frac{(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 4 - (x^2 - 4x + 4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{8x}{(x+2)(x-2)}. \end{aligned}$$

Nierówność

$$\frac{x+2}{x-2} < \frac{x-2}{x+2}$$

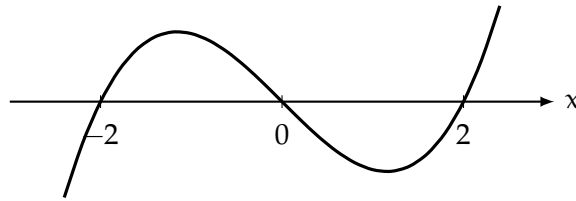
jest równoważna nierówności

$$\frac{8x}{(x+2)(x-2)} < 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$8x(x+2)(x-2) < 0.$$

Wykres funkcji $x(x+2)(x-2)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$8x(x+2)(x-2) < 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D , tzn.

$$(-\infty, -2) \cup (0, 2) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} \leq 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

- (e) Zaczniemy od opisanego dziedziny nierówności. Widzimy, że występuje w niej wyrażenie wymierne o mianowniku postaci: $x^2 - 6x + 8$. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 2$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{6+2}{2} = 4 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{6-2}{2} = 2.$$

Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = 2$ oraz $x = 4$, a więc $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 4\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązywania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x^2 - 6x + 8$. Stąd

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+8} + 1 = \frac{2x-5}{x^2-6x+8} + \frac{x^2-6x+8}{x^2-6x+8} = \frac{x^2-4x+3}{x^2-8x+20}.$$

Rozłóżmy teraz trójmian kwadratowy $x^2 - 4x + 3$ na czynniki. W tym celu obliczamy jego wyróżnik: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 2$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{4+2}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{4-2}{2} = 1.$$

W konsekwencji $x^2 - 6x + 8 = (x-1)(x-3)$. Ponieważ wcześniej wyznaczyliśmy pierwiastki trójmianu $x^2 - 6x + 8$, którymi są liczby 2 oraz 4, jego postać iloczynowa to: $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$. Nierówność

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+8} \leq -1$$

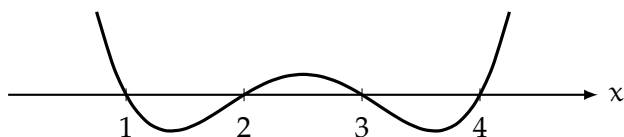
jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leq 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4) \leq 0.$$

Wykres funkcji $(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4) \leq 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in [1, 2] \cup [3, 4].$$

Uwzględniając dziedzinę pierwotnej nierówności wymiernej

$$\frac{2x-5}{x^2-6x+8} \leq -1$$

stwierdzamy, że jej rozwiązaniami są te liczby x , które spełniają warunek

$$x \in [1, 2] \cup [3, 4].$$

- (f) Zaczniemy od opisanie dziedziny nierówności. Widzimy, że występuje w niej wyrażenie wymierne o mianowniku postaci: $x^2 - 8x + 20$. Zwróćmy uwagę, że wielomian $x^2 - 8x + 20$ nie posiada pierwiastków rzeczywistych, ponieważ jego wyróżnik (delta) jest ujemny $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 64 - 80 = -16$. Oznacza to, że nierówność wymierna jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a więc $D = \mathbb{R}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $x^2 - 8x + 10$. Stąd

$$\frac{5x-48}{x^2-8x+20} + 1 = \frac{5x-48}{x^2-8x+20} + \frac{x^2-8x+20}{x^2-8x+20} = \frac{x^2-3x-28}{x^2-8x+20}.$$

Przedstawmy teraz trójmian kwadratowy $x^2 - 3x - 28$ w postaci iloczynowej. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-28) = 9 + 112 = 121$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 11$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{3+11}{2} = 7 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{3-11}{2} = -4.$$

W konsekwencji $x^2 - 3x - 28 = (x-7)(x+4)$. Nierówność

$$\frac{5x-48}{x^2-8x+20} \geq -1$$

jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{(x-7)(x+4)}{x^2-8x+20} \geq 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-7)(x+4)(x^2-8x+20) \geq 0.$$

Wiemy już, że trójmian kwadratowy $x^2 - 8x + 20$ nie ma pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ współczynnik przy najwyższej potędze jest dodatni, ramiona paraboli, która jest

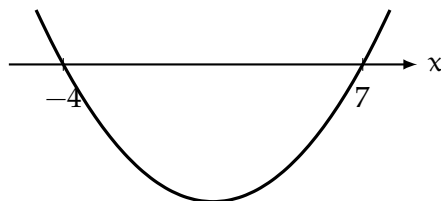
wykresem tego trójkątnika, skierowane są ku górze. Oznacza to, że $x^2 - 8x + 20 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności

$$(x - 7)(x + 4)(x^2 - 8x + 20) \geq 0$$

przez wyrażenie $x^2 - 8x + 20$, które jest zawsze dodatnie, co nie wpływa na kierunek nierówności. Dostajemy

$$(x - 7)(x + 4) \geq 0.$$

Wykres funkcji $(x - 7)(x + 4)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x - 7)(x + 4) \geq 0.$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, -4] \cup [7, +\infty).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D , tzn.

$$(-\infty, -4] \cup [7, +\infty) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{5x - 48}{x^2 - 8x + 20} \geq -1$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

- (g) Zaczniemy od opisu dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x^2 - x - 2$ oraz $x^2 + 2x + 1$. Zauważmy, że drugi z tych trójkątów możemy zapisać przy pomocy wzoru skróconego mnożenia: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Aby rozłożyć trójkąt $x^2 - x - 2$ na czynniki liniowe obliczamy jego wyróżnik: $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 3$. Pierwiastki trójkątnika $x^2 - x - 2$ mają postać

$$x = \frac{1 + 3}{2} = 2 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{1 - 3}{2} = -1.$$

Zatem trójkąt $x^2 - x - 2$ rozkłada się na iloczyn: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = -1$ oraz $x = 2$, ponieważ są to pierwiastki obydwu mianowników, dla których wyrażenia wymierne tracą sens (dzielenie przez zero). Zatem dziedziną nierówności jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x + 1)^2(x - 2)$. Stąd

$$\begin{aligned} \frac{2}{x^2 - x - 2} - \frac{1}{x^2 + 2x + 1} &= \frac{2}{(x + 1)(x - 2)} - \frac{1}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2(x - 2)} - \frac{x - 2}{(x + 1)^2(x - 2)} \\ &= \frac{x + 4}{(x + 1)^2(x - 2)}. \end{aligned}$$

Nierówność

$$\frac{2}{x^2 - x - 2} - \frac{1}{x^2 + 2x + 1} < 0$$

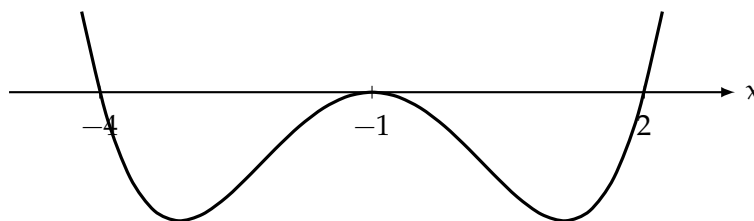
jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{x + 4}{(x + 1)^2(x - 2)} < 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x + 4)(x + 1)^2(x - 2) < 0.$$

Wykres funkcji $(x + 4)(x + 1)^2(x - 2)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x + 4)(x + 1)^2(x - 2) < 0.$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-4, -1) \cup (-1, 2).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D , tzn.

$$(-4, -1) \cup (-1, 2) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{2}{x^2 - x - 2} - \frac{1}{x^2 + 2x + 1} < 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

- (h) Zaczniemy od opisanie dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x^2 + x - 2$ oraz $x^2 - 2x + 1$. Zauważmy, że drugi z tych trójmianów możemy zapisać przy pomocy wzoru skróconego mnożenia: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Aby rozłożyć trójmian $x^2 + x - 2$ na czynniki liniowe obliczamy jego wyróżnik: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 3$. Pierwiastki trójmianu $x^2 + x - 2$ mają postać

$$x = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-1 - 3}{2} = -2.$$

Zatem trójmian $x^2 - x - 2$ rozkłada się na iloczyn: $x^2 - x - 2 = (x + 2)(x - 1)$. Oznacza to, że nierówność nie jest określona dla $x = 1$ oraz $x = -2$, ponieważ są to pierwiastki obydwu mianowników, dla których wyrażenia wymierne tracą sens (dzielenie przez zero). Zatem dziedziną nierówności jest zbiór $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązywania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x-1)^2(x+2)$. Stąd

$$\begin{aligned}\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-2x+1} &= \frac{3}{(x-1)(x+2)} - \frac{2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3(x-1)}{(x-1)^2(x+2)} - \frac{2(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \frac{x-7}{(x-1)^2(x+2)}.\end{aligned}$$

Nierówność

$$\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-2x+1} > 0$$

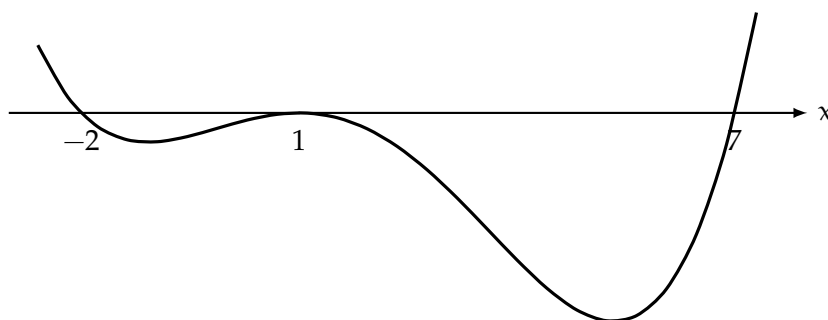
jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{x-7}{(x-1)^2(x+2)} > 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-7)(x-1)^2(x+2) > 0.$$

Wykres funkcji $(x-7)(x-1)^2(x+2)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x-7)(x-1)^2(x+2) > 0.$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, -2) \cup (7, +\infty).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D , tzn.

$$(-\infty, -2) \cup (7, +\infty) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-2x+1} > 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

- (i) Zaczniemy od opisanie dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: x^2+5x+8 oraz x^2-3x+4 . Zwróćmy uwagę, że żaden z powyższych trójmianów nie posiada pierwiastków rzeczywistych, ponieważ ich wyróżnik (delta) są ujemne: $\Delta_1 = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 - 40 = -15$ oraz $\Delta_2 = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7$. Oznacza to, że nierówność wymierna jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a więc $D = \mathbb{R}$.

Przechodzimy teraz do rozwiązywania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x^2 + 5x + 8)(x^2 - 3x + 4)$. Stąd

$$\begin{aligned} & \frac{x+2}{x^2+5x+8} - \frac{x-8}{x^2-3x+4} \\ &= \frac{(x+2)(x^2-3x+4)}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)} - \frac{(x-8)(x^2+5x+8)}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)} \\ &= \frac{x^3-3x^2+4x+2x^2-6x+8-(x^3+5x^2+8x-8x^2-40x-64)}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)} \\ &= \frac{2x^2+30x+72}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)}. \end{aligned}$$

Przedstawmy teraz trójmian kwadratowy $2x^2+30x+72$ w postaci iloczynowej. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 30^2 - 4 \cdot 2 \cdot 72 = 900 - 576 = 324$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 18$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{-30+18}{4} = -3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-30-18}{4} = -12.$$

W konsekwencji $2x^2+30x+72 = 2(x+12)(x+3)$. Nierówność

$$\frac{x+2}{x^2+5x+8} - \frac{x-8}{x^2-3x+4} \geq 0$$

jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{2(x+12)(x+3)}{(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)} \geq 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$2(x+12)(x+3)(x^2+5x+8)(x^2-3x+4) \geq 0.$$

Wiemy już, że trójmiany kwadratowe x^2+5x+8 oraz x^2-3x+4 nie mają pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ współczynniki przy najwyższych potęgach są dodatnie, ramiona parabol, które są wykresami tych trójmianów, skierowane są ku górze. Oznacza to, że $x^2+5x+8 > 0$ oraz $x^2-3x+4 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności

$$2(x+12)(x+3)(x^2+5x+8)(x^2-3x+4) \geq 0$$

przez iloczyn $(x^2+5x+8)(x^2-3x+4)$, który jest zawsze dodatni. Dostajemy

$$2(x+12)(x+3) \geq 0.$$

Wykres funkcji $(x+12)(x+3)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$2(x + 12)(x + 3) \geq 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in (-\infty, -12] \cup [-3 + \infty).$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D , tzn.

$$(-\infty, -12] \cup [-3 + \infty) \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{x + 2}{x^2 + 5x + 8} - \frac{x - 8}{x^2 - 3x + 4} \geq 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

- (j) Zaczniemy od opisu dziedziny nierówności. Widzimy, że występują w niej dwa wyrażenia wymierne o mianownikach postaci: $x^2 - 4x + 9$ oraz $x^2 - 5x + 7$. Zwróćmy uwagę, że żaden z powyższych trójmianów nie posiada pierwiastków rzeczywistych, ponieważ ich wyróżnik (delta) są ujemne: $\Delta_1 = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 16 - 36 = -20$ oraz $\Delta_2 = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 25 - 28 = -3$. Oznacza to, że nierówność wymierna jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a więc $D = \mathbb{R}$. Przechodzimy teraz do rozwiązania nierówności w obrębie tej dziedziny. Wspólnym mianownikiem obu ułamków jest $(x^2 - 4x + 9)(x^2 - 5x + 7)$. Stąd

$$\begin{aligned} & \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 9} - \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 7} \\ &= \frac{(x - 1)(x^2 - 5x + 7)}{(x^2 - 4x + 9)(x^2 - 5x + 7)} - \frac{(x - 3)(x^2 - 4x + 9)}{(x^2 - 4x + 9)(x^2 - 5x + 7)} \\ &= \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - x^2 + 5x - 7 - (x^3 - 4x^2 + 9x - 3x^2 + 12x - 27)}{(x^2 - 4x + 9)(x^2 - 5x + 7)} \\ &= \frac{x^2 - 9x + 20}{(x^2 - 4x + 9)(x^2 - 5x + 7)}. \end{aligned}$$

Przedstawmy teraz trójmian kwadratowy $x^2 - 9x + 20$ w postaci iloczynowej. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 1$. Pierwiastki trójmianu mają postać

$$x = \frac{9 + 1}{2} = 5 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{9 - 1}{2} = 4.$$

W konsekwencji $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5)$. Nierówność

$$\frac{x - 1}{x^2 - 4x + 9} - \frac{x - 3}{x^2 - 5x + 7} \leq 0$$

jest zatem równoważna nierówności

$$\frac{(x - 4)(x - 5)}{(x^2 - 4x + 9)(x^2 - 5x + 7)} \leq 0.$$

Teraz przekształcamy wyrażenie wymierne do postaci iloczynu wielomianów:

$$(x-4)(x-5)(x^2-4x+9)(x^2-5x+7) \leq 0.$$

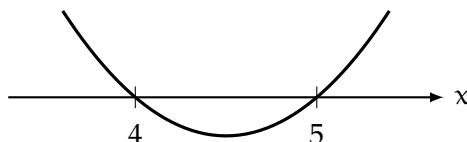
Wiemy już, że trójmiany kwadratowe $x^2 - 4x + 9$ oraz $x^2 - 5x + 7$ nie mają pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ współczynniki przy najwyższych potęgach są dodatnie, ramiona paraboli, które są wykresami tych trójmianów, skierowane są ku górze. Oznacza to, że $x^2 - 4x + 9 > 0$ oraz $x^2 - 5x + 7 > 0$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Możemy zatem podzielić obie strony nierówności

$$(x-4)(x-5)(x^2-4x+9)(x^2-5x+7) \leq 0$$

przez iloczyn $(x^2 - 4x + 9)(x^2 - 5x + 7)$, który jest zawsze dodatni. Dostajemy

$$(x-4)(x-5) \leq 0.$$

Wykres funkcji $(x-4)(x-5)$ wygląda się następująco.



Na jego podstawie możemy odczytać, że rozwiązaniem nierówności wielomianowej

$$(x-4)(x-5) \leq 0$$

są wszystkie liczby rzeczywiste spełniające warunek

$$x \in [4, 5].$$

Ponieważ zbiór rozwiązań powyższej nierówności jest podzbiorem dziedziny D , tzn.

$$[4, 5] \subseteq D,$$

stwierdzamy, że rozwiązaniem nierówności wymiernej

$$\frac{x-1}{x^2-4x+9} - \frac{x-3}{x^2-5x+7} \leq 0$$

jest dokładnie ten sam zbiór liczb.

10.4. Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mamy

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left[\left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\right] \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\right] = f(x)[f^2(x) - 3]. \end{aligned}$$

Jeżeli zatem dla pewnej liczby a wartość $f(a)$ jest całkowita, to $g(a) \in \mathbb{Z}$. Jeżeli ponadto $f(a)$ jest liczbą parzystą, to $g(a) = f(a)[f^2(a) - 3]$ jest również liczbą parzystą. Z drugiej strony, jeżeli $f(a)$ jest liczbą nieparzystą, to $f^2(a) - 3$ jest liczbą parzystą i w konsekwencji parzyste jest również $g(a)$.

10.6. Dla każdego $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ mamy

$$f(x) = \frac{x-5}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} - \frac{2}{x-3} = 1 - \frac{2}{x-3}.$$

Założmy, że punkt $(a, f(a))$ leżący na wykresie funkcji f jest taki, że $a, f(a) \in \mathbb{Z}$. Wtedy

$$f(a) - 1 = -\frac{2}{a-3} \in \mathbb{Z}.$$

Oznacza to, że $(a-3)|2$. Stąd $a-3 \in \{-2, -1, 1, 2\}$ i w konsekwencji $a \in \{1, 2, 4, 5\}$. A zatem jeżeli punkt $(a, f(a))$ z wykresu funkcji f ma obydwie współrzędne całkowite, to a jest jedną z czterech liczb 1, 2, 4, 5. Innymi słowy do wykresu funkcji f należą co najwyżej cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych. Łatwo sprawdzić, że w każdym z tych czterech przypadków otrzymujemy punkt $(a, f(a))$ o obydwu współrzędnych całkowitych. Mamy bowiem $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(4) = -1$ oraz $f(5) = 0$. Wykazaliśmy więc, że do wykresu funkcji f należą dokładnie cztery punkty o obu współrzędnych całkowitych.

10.7. (a) Najpierw zauważmy, że mianownik ułamka

$$\frac{x+15}{x^2-25}$$

można rozłożyć na iloczyn dwóch czynników liniowych: $(x-5)(x+5)$. Wobec tego dany ułamek możemy zapisać w postaci ułamków prostych

$$\frac{x+15}{(x-5)(x+5)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+5},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-5)(x+5)$ i dostajemy

$$x+15 = A(x+5) + B(x-5).$$

W tym miejscu możemy postąpić na różne sposoby. Jedną z metod jest uporządkowanie prawej strony i porównanie współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej x . My jednak wybierzemy prostsze podejście – podstawimy do powyższej równości odpowiednie wartości x . Warto zauważyć, że dla $x = 5$ zeruje się czynnik $(x-5)$, a dla $x = -5$ – czynnik $(x+5)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x=5 &\rightarrow 5+15 = A(5+5) + B(5-5), \\ x=-5 &\rightarrow -5+15 = A(-5+5) + B(-5-5). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$20 = 10A \quad \text{oraz} \quad 10 = -10B,$$

skąd wynika, że $A = 2$ oraz $B = -1$. Podsumowując, mamy

$$\frac{x+15}{(x-5)(x+5)} = \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+5}.$$

(b) Najpierw zauważmy, że mianownik ułamka

$$\frac{x-12}{x^2-16}$$

można rozłożyć na iloczyn dwóch czynników liniowych: $(x - 4)(x + 4)$. Wobec tego dany ułamek możemy zapisać w postaci ułamków prostych

$$\frac{x - 12}{x^2 - 16} = \frac{A}{x - 4} + \frac{B}{x + 4},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x - 4)(x + 4)$ i dostajemy

$$x - 12 = A(x + 4) + B(x - 4).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = 4$ zeruje się czynnik $(x - 4)$, a dla $x = -4$ – czynnik $(x + 4)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x = 4 &\rightarrow 4 - 12 = A(4 + 4) + B(4 - 4), \\ x = -4 &\rightarrow -4 - 12 = A(-4 + 4) + B(-4 - 4). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$-8 = 8A \quad \text{oraz} \quad -16 = -8B,$$

skąd wynika, że $A = -1$ oraz $B = 2$. Podsumowując, mamy

$$\frac{x - 12}{x^2 - 16} = -\frac{1}{x - 4} + \frac{2}{x + 4}.$$

(c) Zaczniemy od rozłożenia mianownika ułamka

$$\frac{3x - 3}{x^2 - 5x + 6},$$

czyli trójmianu kwadratowego $x^2 - 5x + 6$ na czynniki. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 1$, więc pierwiastki trójmianu $x^2 - 5x + 6$ są postaci

$$x = \frac{5 + 1}{2} = 3 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

Zapisując wielomian $x^2 - 5x + 6$ w postaci iloczynowej $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$, widzimy, że dany ułamek możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{3x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3x - 3}{(x - 3)(x - 2)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x - 3)(x - 2)$ i dostajemy

$$3x - 3 = A(x - 2) + B(x - 3).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = 2$ zeruje się czynnik $(x - 2)$, a dla $x = 3$ – czynnik $(x - 3)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x = 2 &\rightarrow 3 \cdot 2 - 3 = A(2 - 2) + B(2 - 3), \\ x = 3 &\rightarrow 3 \cdot 3 - 3 = A(3 - 2) + B(3 - 3). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$3 = -B \quad \text{oraz} \quad 6 = A,$$

skąd wynika, że $A = 6$ oraz $B = -3$. Podsumowując, mamy

$$\frac{3x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{6}{x - 3} - \frac{3}{x - 2}.$$

(d) Zaczniemy od rozłożenia mianownika ułamka

$$\frac{5x + 10}{x^2 + 3x - 4},$$

czyli trójmianu kwadratowego $x^2 + 3x - 4$ na czynniki. Obliczamy wyróżnik: $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$. Stąd $\sqrt{\Delta} = 5$, więc pierwiastki trójmianu $x^2 + 3x - 4$ są postaci

$$x = \frac{-3 + 5}{2} = 1 \quad \text{oraz} \quad x = \frac{-3 - 5}{2} = -4.$$

Zapisując wielomian $x^2 + 3x - 4$ w postaci iloczynowej $x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$, widzimy, że dany ułamek możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{5x + 10}{x^2 + 3x - 4} = \frac{5x + 10}{(x - 1)(x + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 4},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x - 1)(x + 4)$ i dostajemy

$$5x + 10 = A(x + 4) + B(x - 1).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = -4$ zeruje się czynnik $(x + 4)$, a dla $x = 1$ – czynnik $(x - 1)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x = -4 &\rightarrow 5 \cdot (-4) + 10 = A(-4 + 4) + B(-4 - 1), \\ x = 1 &\rightarrow 5 \cdot 1 + 10 = A(1 + 4) + B(1 - 1). \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$-10 = -5B \quad \text{oraz} \quad 15 = 5A,$$

skąd wynika, że $A = 3$ oraz $B = 2$. Podsumowując, mamy

$$\frac{5x + 10}{x^2 + 3x - 4} = \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x + 4}.$$

(e) Ułamek

$$\frac{x + 3}{(x + 1)^2}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x + 1)^2$ i dostajemy

$$x + 3 = A(x + 1) + B.$$

Zauważmy, że dla $x = -1$ zeruje się czynnik $(x + 1)$. Drugą wartość x możemy dobrać dowolnie, jednak warto wybrać taką, która uprości dalsze obliczenia. Na przykład, możemy przyjąć $x = 0$. Wówczas:

$$\begin{aligned} x = -1 &\rightarrow (-1) + 3 = A(-1 + 1) + B, \\ x = 0 &\rightarrow 0 + 3 = A(0 + 1) + B. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{aligned} B &= 2, \\ A + B &= 3, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $A = 1$ oraz $B = 2$. Podsumowując, mamy

$$\frac{x+3}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

(f) Ułamek

$$\frac{x+5}{(x-1)^2}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{x+5}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-1)^2$ i dostajemy

$$x+5 = A(x-1) + B.$$

Zauważmy, że dla $x = 1$ zeruje się czynnik $(x-1)$. Drugą wartość x możemy dobrać dowolnie, jednak warto wybrać taką, która uprości dalsze obliczenia. Na przykład, możemy przyjąć $x = 0$. Wówczas:

$$\begin{aligned} x = 1 &\rightarrow 1+5 = A(1-1) + B, \\ x = 0 &\rightarrow 0+5 = A(0-1) + B. \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{aligned} B &= 6, \\ B - A &= 5, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $A = 1$ oraz $B = 6$. Podsumowując, mamy

$$\frac{x+5}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{6}{(x-1)^2}.$$

(g) Zwróćmy uwagę, że trójmianu $x^2 + 4$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż jego wyróżnik (delta) jest ujemny: $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16$. Zatem Ułamek

$$\frac{8x^2 + x + 16}{(x-3)(x^2+4)}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{8x^2 + x + 16}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4},$$

gdzie A , B oraz C są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-3)(x^2+4)$ i dostajemy

$$8x^2 + x + 16 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3).$$

Zauważmy, że dla $x = 3$ zeruje się czynnik $(x-3)$. Pozostałe dwie wartości x możemy dobrać dowolnie, jednak warto wybrać takie, które uproszczą dalsze obliczenia. Na przykład, możemy przyjąć $x = 0$ oraz $x = 1$. Wówczas:

$$\begin{aligned}x = 3 &\rightarrow 8 \cdot 3^2 + 3 + 16 = A(3^2 + 4) + (3 \cdot B + C)(3 - 3), \\x = 0 &\rightarrow 8 \cdot 0^2 + 0 + 16 = A(0^2 + 4) + (0 \cdot B + C)(0 - 3), \\x = 1 &\rightarrow 8 \cdot 1^2 + 1 + 16 = A(1^2 + 4) + (1 \cdot B + C)(1 - 3).\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{aligned}13A &= 91, \\4A - 3C &= 16, \\5A - 2B - 2C &= 25,\end{aligned}$$

skąd wynika, że $A = 7$, $B = 1$ oraz $C = 4$. Podsumowując, mamy

$$\frac{8x^2 + x + 16}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{7}{x-3} + \frac{x+4}{x^2+4}.$$

- (h) Zwróćmy uwagę, że trójmianu $x^2 + 2$ nie można rozłożyć na czynniki liniowe, gdyż jego wyróżnik (delta) jest ujemny: $\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -8$. Zatem Ułamek

$$\frac{3x+6}{(x-4)(x^2+2)}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{3x+6}{(x-4)(x^2+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx+C}{x^2+2},$$

gdzie A , B oraz C są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-4)(x^2+2)$ i dostajemy

$$3x + 6 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x - 4).$$

Zauważmy, że dla $x = 4$ zeruje się czynnik $(x-4)$. Pozostałe dwie wartości x możemy dobrać dowolnie, jednak warto wybrać takie, które uproszczą dalsze obliczenia. Na przykład, możemy przyjąć $x = 0$ oraz $x = 1$. Wówczas:

$$\begin{aligned}x = 4 &\rightarrow 3 \cdot 4 + 6 = A(4^2 + 2) + (4 \cdot B + C)(4 - 4), \\x = 0 &\rightarrow 3 \cdot 0 + 6 = A(0^2 + 2) + (0 \cdot B + C)(0 - 4), \\x = 1 &\rightarrow 3 \cdot 1 + 6 = A(1^2 + 2) + (1 \cdot B + C)(1 - 4).\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$\begin{aligned}18A &= 18, \\2A - 4C &= 6, \\3A - 3B - 3C &= 9,\end{aligned}$$

skąd wynika, że $A = 1$, $B = -1$ oraz $C = -1$. Podsumowując, mamy

$$\frac{3x+6}{(x-4)(x^2+2)} = \frac{1}{x-4} - \frac{x+1}{x^2+2}.$$

UWAGA: Pozostałe dwa podpunkty różnią się od poprzednich tym, że tym razem stopień wielomianu w liczniku jest większy niż stopień mianownika. W związku z tym musimy najpierw podzielić wielomian w liczniku przez wielomian w mianowniku, aby wyodrębnić czynnik „całkowity”. Operacja ta przypomina rozdział ułamka niewłaściwego na część całkowitą i ułamek właściwy, na przykład:

$$\frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$$

lub

$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}.$$

(i) Rozważmy wyrażenie wymierne

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{(x-2)(x-1)}.$$

Korzystając ze schematu Hornera, w pierwszym kroku podzielimy wielomian $x^3 - 4x^2 + 4x + 4$ przez dwumian $x - 2$. Otrzymujemy

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & 4 \end{array}$$

Wynikiem tego dzielenia jest iloraz $Q_1(x) = x^2 - 2x$ oraz reszta $R_1(x) = 4$. Możemy więc zapisać $x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = (x-2)(x^2 - 2x) + 4$. W kolejnym kroku dzielimy wielomian $x^2 - 2x$ przez dwumian $x - 1$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 \end{array}$$

W wyniku tego dzielenia otrzymujemy iloraz $Q_2(x) = x - 1$ oraz resztę $R_2(x) = -1$. Zatem możemy zapisać: $x^2 - 2x = (x-1) - 1$. Podstawiając to do wcześniejszej równości, otrzymujemy

$$x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = (x-2)[(x-1)^2 - 1] + 4 = (x-2)(x-1)^2 - (x-2) + 4.$$

Stąd

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{(x-2)(x-1)} = (x-1) + \frac{6-x}{(x-2)(x-1)}.$$

Wyrażenie wymierne

$$\frac{6-x}{(x-2)(x-1)}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{6-x}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x-2)(x-1)$ i dostajemy

$$6-x = A(x-1) + B(x-2).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = 1$ zeruje się czynnik $(x - 1)$, a dla $x = 2$ – czynnik $(x - 2)$. Wtedy

$$x = 1 \rightarrow 6 - 1 = A(1 - 1) + B(1 - 2),$$

$$x = 2 \rightarrow 6 - 2 = A(2 - 1) + B(2 - 2).$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$5 = -B \quad \text{oraz} \quad 4 = A,$$

skąd wynika, że $A = 4$ oraz $B = -5$. Podsumowując, mamy

$$\frac{6 - x}{(x - 2)(x - 1)} = \frac{4}{x - 2} - \frac{5}{x - 1}.$$

Ostatecznie

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4}{(x - 2)(x - 1)} = x - 1 + \frac{4}{x - 2} - \frac{5}{x - 1}.$$

(j) Rozważmy wyrażenie wymierne

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5x + 3}{(x + 1)(x + 4)}.$$

Korzystając ze schematu Hornera, w pierwszym kroku podzielimy wielomian $x^3 + 6x^2 + 5x + 3$ przez dwumian $x + 1$. Otrzymujemy

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 6 & 5 & 3 \\ -1 & & -1 & -5 & 0 \\ \hline & 1 & 5 & 0 & 3 \end{array}$$

Wynikiem tego dzielenia jest iloraz $Q_1(x) = x^2 + 5x$ oraz reszta $R_1(x) = 3$. Możemy więc zapisać $x^3 + 6x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(x^2 + 5x) + 3$. W kolejnym kroku dzielimy wielomian $x^2 + 5x$ przez dwumian $x + 4$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 5 & 0 \\ -4 & & -4 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -4 \end{array}$$

W wyniku tego dzielenia otrzymujemy iloraz $Q_2(x) = x + 1$ oraz resztę $R_2(x) = -4$. Zatem możemy zapisać: $x^2 + 5x = (x + 4)(x + 1) - 4$. Podstawiając to do wcześniejszej równości, otrzymujemy

$$x^3 + 6x^2 + 5x + 3 = (x + 1)[(x + 1)(x + 4) - 4] + 3 = (x + 1)^2(x + 4) - 4(x + 1) + 3.$$

Stąd

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5x + 3}{(x + 1)(x + 4)} = (x + 1) - \frac{4x + 1}{(x + 1)(x + 4)}.$$

Wyrażenie wymierne

$$\frac{4x + 1}{(x + 1)(x + 4)}$$

możemy zapisać za pomocą ułamków prostych w postaci

$$\frac{4x + 1}{(x + 1)(x + 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 4},$$

gdzie A oraz B są stałymi rzeczywistymi. Naszym celem jest wyznaczenie tych stałych. Mnożymy obie strony powyższej równości przez $(x+1)(x+4)$ i dostajemy

$$4x + 1 = A(x + 4) + B(x + 1).$$

Zwróćmy uwagę, że dla $x = -1$ zeruje się czynnik $(x + 1)$, a dla $x = -4$ – czynnik $(x + 4)$. Wtedy

$$x = -1 \rightarrow 4 \cdot (-1) + 1 = A(-1 + 4) + B(-1 + 1),$$

$$x = -4 \rightarrow 4 \cdot (-4) + 1 = A(-4 + 4) + B(-4 + 1).$$

Otrzymujemy zatem układ równań

$$-3 = 3A \quad \text{oraz} \quad -15 = -3B,$$

skąd wynika, że $A = -1$ oraz $B = 5$. Podsumowując, mamy

$$\frac{4x + 1}{(x + 1)(x + 4)} = -\frac{1}{x + 1} + \frac{5}{x + 4}.$$

Ostatecznie

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 5x + 3}{(x + 1)(x + 4)} = x + 1 + \frac{1}{x + 1} - \frac{5}{x + 4}.$$

LITERATURA

BIBLIOGRAFIA. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- N. Dróbka, K. Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1994.
- G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy, tomy 1*, PWN, 1985.
- J. Rutkowski, *Funkcje wymierne – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.
- J. Rutkowski, *Przekształcenia wykresów funkcji – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015
- R. J. Pawlak, A. Rychlewicz, A. Rychlewicz, K. Żylak, *Matematyka krok po kroku. Matura 2002. Zbiór zadań: część I*, Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona Sp. z o.o., Łódź, 2001.
- S. Zieleń, *Matematyka dla klasy II szkoły średniej*, Wydawnictwo Nowik, Opole, 1997.