Rozdział 7

Elementy kombinatoryki

Teoria

Liczebność zbioru. Jeżeli X jest zbiorem skończonym, to jego liczebność (czyli ilość elementów, które zawiera) będziemy oznaczać symbolem $|X|$. Zauważmy, że $|\emptyset| = 0$.

Prawo dodawania. Jeżeli $X_1, \ldots, X_n$ są skończonymi zbiorami parami rozłącznymi, tzn. $X_i \cap X_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $\left|\bigcup_{i=1}^n X_i\right| = \sum_{i=1}^n |X_i|$.

Prawo mnożenia. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą skończonymi zbiorami. Liczba ciągów $(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, wynosi $|X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n|$.

Wariacja bez powtórzeń. k-wyrazową *wariacją bez powtórzeń* zbioru X nazywamy każdy ciąg $(x_1, \ldots, x_k)$ elementów zbioru X, którego wyrazy nie mogą się powtarzać. Liczba k-elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego jest równa $n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.

Permutacja jest szczególnym typem wariacji bez powtórzeń. Permutacją n-elementowego zbioru X nazywamy więc każdy ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ elementów zbioru X, którego wyrazy nie mogą się powtarzać. Liczba permutacji zbioru n-elementowego wynosi $n!$.

Wariacja z powtórzeniami. k-wyrazową *wariacją z powtórzeniami* zbioru X nazywamy każdy ciąg $(x_1, \ldots, x_k)$ elementów tego zbioru. Liczba k-elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego jest równa n^k.

Kombinacja bez powtórzeń. k-elementową *kombinacją bez powtórzeń* (lub po prostu *kombinacją*) zbioru X nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru X. Liczba k-elementowych kombinacji zbioru n-elementowego wynosi $\binom{n}{k}$.

Kombinacja z powtórzeniami. k-elementową *kombinacją z powtórzeniami* zbioru n-elementowego $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ nazywamy każdy ciąg $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ taki, że $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$, gdzie $k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Traktując elementy zbioru $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ jako kolory, można k-elementową kombinację z powtórzeniami interpretować jako pomalowanie k identycznych kul mając do dyspozycji n kolorów w taki sposób, że k_1 kul pomalowanych jest kolorem x_1, k_2 kul kolorem x_2, itd. Liczba k-elementowych kombinacji z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego jest równa $\binom{n+k-1}{k}$.

Który ze schematów wyboru wybrać? Można posłużyć się poniższym zestawieniem.

	Czy kolejność wylosowanych elementów jest istotna?	*Czy wylosowane elementy mogą się powtarzać?*
wariacja bez powtórzeń	tak	nie
wariacja z powtórzeniami	tak	tak
kombinacja bez powtórzeń	nie	nie
kombinacja z powtórzeniami	nie	tak

Zadania

Zadanie 7.1. Ile liczb dwucyfrowych ma parzysty iloczyn swoich cyfr?

Zadanie 7.2. Na ile sposobów można zapisać w jednym rzędzie

(a) cyfry $0,1,\ldots,9$,

(b) cyfry $0,1,\ldots,9$ tak, by 1 i 2 stały obok siebie,

(c) cyfry $0,1,\ldots,9$ tak, by 1, 2 i 3 nie tworzyły trzech kolejnych wyrazów (niezależnie od kolejności).

Zadanie 7.3. Na ile sposobów można usadzić przy okrągłym stole n osób?

Zadanie 7.4. Zapytano 10 osób o dzień ich urodzin. Jak duży jest zbiór wszystkich możliwości zakładając, że rok liczy 365 dni?

Zadanie 7.5. Oblicz ile jest liczb 4-cyfrowych parzystych.

Zadanie 7.6. Na ile wszystkich różnych sposobów można ustawić w szeregu 4 chłopców i 3 dziewczynki tak, aby:

(a) najpierw stały dziewczynki, a następnie chłopcy,

(b) pierwszy stał chłopiec,

(c) pierwszy i ostatni stał chłopiec,

(d) żadnych dwóch chłopców nie stało obok siebie.

Zadanie 7.7. Przy grze w preferansa każdy z trzech graczy otrzymuje 10 kart a dwie karty zostają do tzw. kupna lub banku. Iloma sposobami można rozdać karty graczom siedzącym na ustalonych miejscach?

Zadanie 7.8. Do przedziału kolejowego drugiej klasy (dwa rzędy po cztery miejsca) wchodzi osiem osób. Na ile wszystkich różnych sposobów mogą one zająć miejsca tak, aby ustalone dwie osoby A oraz B siedziały:

(a) obok siebie,

(b) naprzeciwko?

Zadanie 7.9. Obliczyć, na ile sposobów można z dziesięciu pań i trzynastu panów utworzyć

(a) 10 nienumerowanych par tanecznych,

(b) 10 numerowanych par tanecznych.

Zadanie 7.10. Ile jest liczb 4-cyfrowych, w których nie powtarza się żadna cyfra.

Zadanie 7.11. Mamy osiem różnych książek angielskich, siedem niemieckich i pięć polskich. Na ile sposobów można ustawić w rzędzie trzy spośród tych książek?

Zadanie 7.12. Na ile sposobów z talii 52 kart można wybrać 13 kart tak, aby były wśród nich

(a) dokładnie 4 asy,

(b) dokładnie 2 asy,

(c) dokładnie 2 asy i dokładnie 2 króle?

Zadanie 7.13. Ile można wykonać trójkolorowych chorągiewek z sześciu barw?

Zadanie 7.14. Alfabet Morse'a składa się z dwóch różnych elementów: kreski i kropki. Ile znaków pisarskich o maksymalnej długości 5 można utworzyć z tych elementów?

Zadanie 7.15. Tysiąc osób uczestniczących w festiwalu teatralnym, odpowiedziało na pytania: 1) Którą z dziesięciu sztuk uważasz za najlepszą, 2) którą stawiasz na drugim miejscu, 3) którą na trzecim? Czy może się zdarzyć, że wszyscy odpowiedzieli różnie?

Zadanie 7.16. Obliczyć liczbę sposobów takiego rozmieszczenia dziewięciu kul ponumerowanych liczbami od 1 do 9 w trzech pudełkach ponumerowanych liczbami od 1 do 3, by spełniony był warunek:

(a) pudełko nr 1 jest puste,

(b) kula nr 1 jest w pudełku nr 1,

(c) w pudełku nr 1 jest dokładnie jedna kula,

(d) w pudełku nr 1 jest przynajmniej jedna kula,

(e) w pudełku nr 1 jest co najwyżej jedna kula.

Zadanie 7.17. Na ile sposobów można rozdać 10 pączków 3 osobom. (Zakładamy, że pączki są nierozróżnialne oraz może zdarzyć się sytuacja, w której pewna osoba nie dostanie pączka.)

Zadanie 7.18. Rzucamy równocześnie trzema sześciennymi kostkami do gry. Ile różnych wyników można otrzymać, jeżeli

(a) kostki są identyczne,

(b) kostki są różne.

Zadanie 7.19. Na ile sposobów można ułożyć harmonogram klasówek na 15 tygodni, przy założeniu, że w tygodniu mogą być co najwyżej 2 klasówki, a tydzień składa się z 30 godzin lekcyjnych?

Zadanie 7.20. Na ile sposobów z klasy składającej się z 15 dziewcząt i 16 chłopców można wybrać 5-osobową delegację, w której jest 3 chłopców.

Zadanie 7.21. Ile wszystkich różnych przekątnych ma n-kąt wypukły?

Zadanie 7.22. Na okręgu zaznaczono 6 różnych punktów. Ile wszystkich różnych wielokątów o wszystkich wierzchołkach w tych punktach można narysować?

Zadanie 7.23. Ile nastąpi powitań, jeżeli spotka się 6 osób?

Zadanie 7.24. Iloma sposobami mogą wejść do wagonu tramwajowego cztery osoby, zakładając, że wchodzą tylko jednym wejściem?

Zadanie 7.25. Mamy cztery rodzaje owoców: jabłka, gruszki, morele i pomarańcze. Tworzymy paczki po pięć owoców w każdej. Ile można otrzymać w ten sposób różnych paczek?

Zadanie 7.26. Wyznacz liczbę różnych płaszczyzn, które można poprowadzić w przestrzeni trójwymiarowej przez 10 punktów przy założeniu, że żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej.

Zadanie 7.27. Ile wszystkich różnych wyników można otrzymać, gdy rzucamy dwa razy kostką i trzy razy monetą?

Zadanie 7.28. Siedmiu zawodników bierze udział w turnieju warcabowym. Ile partii winni rozegrać, aby każdy grał z każdym i to zarówno czarnymi, jak i białymi bierkami?

Zadanie 7.29. Ile jest różnych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$

(a) w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych,

(b) w zbiorze liczb naturalnych.

Zadanie 7.30. Na ile sposobów można potasować talię 52 kart, by wszystkie 4 asy sąsiadowały ze sobą.

Rozwiązania

7.1. Spośród wszystkich 90 liczb dwucyfrowych interesują nas te, których iloczyn cyfr jest parzysty. Oznacza to, że co najmniej jedna z cyfr – jedności lub dziesiątek – musi być parzysta. Łatwiej jednak policzyć te liczby, dla których iloczyn cyfr jest. Dzieje się tak wtedy, gdy obie cyfry są nieparzyste. Możemy więc wybierać cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności ze zbioru pięcioelementowego $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Otrzymujemy zatem $5 \cdot 5 = 25)$ takich liczb. Skoro dokładnie 25 liczb dwucyfrowych ma iloczyn cyfr nieparzysty, to pozostałe $90 - 25 = 65$ liczb muszą mieć iloczyn cyfr parzysty.

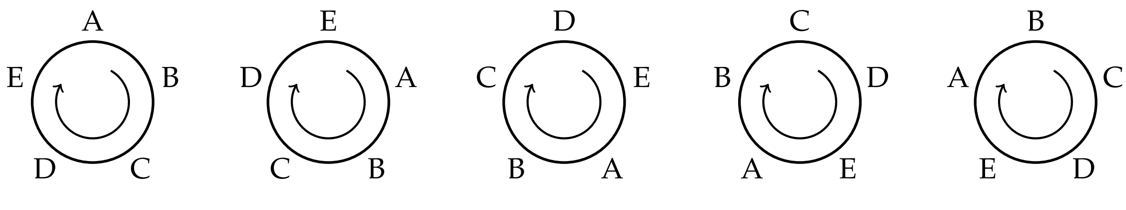
7.2. (a) Dysponujemy dziesięcioma różnymi cyframi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Chcemy je wszystkie ustawić w jednym rzędzie. Na pierwsze miejsce możemy wybrać jedną spośród 10 cyfr, na drugie pozostaje już tylko 9 możliwości, ponieważ jedna cyfra została wykorzystana. Na trzecie miejsce mamy do wyboru 8 cyfr, na czwarte – 7, i tak dalej, aż do ostatniego miejsca, gdzie pozostaje tylko jedna możliwość. Łączna liczba wszystkich możliwych ustawień (czyli permutacji dziesięciu elementów) wynosi: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10!$.

(b) Traktujemy cyfry 1 i 2 jako jedną „supercyfrę", która zawsze pozostaje razem. Możemy sobie wyobrazić, że cyfry te są związane gumką lub sklejone. W takim przypadku mamy do ustawienia w rzędzie 9 obiektów: 8 „zwykłych" cyfr 3,4,5,6,7,8,9,0 oraz jedną „supercyfrę" $\boxed{12}$. Z poprzedniego przykładu wiemy, że liczba sposobów ustawienia 9 obiektów w rzędzie wynosi 9!. Dodatkowo cyfry w obrębie „supercyfry" mogą występować w dwóch kolejnościach 12 lub 21, co daje 2 możliwości dla każdej pozycji „supercyfry". Łączna liczba wszystkich możliwych ustawień wynosi zatem: $9! \cdot 2$.

(c) Sposobów zapisania cyfr $0, 1, 2, \ldots, 9$ tak, by cyfry $1, 2, 3$ tworzyły trzy kolejne wyrazy jest dokładnie $8! \cdot 3!$. Mamy bowiem 7 „zwykłych" cyfr $4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$ oraz jedną „supercyfrę" $\boxed{123}$, która może wystąpić w 3! konfiguracjach. Zatem takich zapisów, w których cyfry $1, 2,$ *nie* tworzą trzech kolejnych wyrazów jest $10! - 8! \cdot 3!$.

7.3. Odpowiedź zależy od tego, co rozumiemy przez stwierdzenie, że dwa sposoby rozsadzenia uznajemy za jednakowe. Siadając przy stole istotne jest dla nas, kto siedzi po naszej lewej i prawej stronie, czyli ważna jest kolejność sąsiadów. Alternatywnie możemy patrzeć tylko na samych sąsiadów, niezależnie od strony, po której siedzą – traktując ich jako zbiór dwuelementowy.

(a) *Dwa sposoby rozsadzenia uznajemy za jednakowe, gdy dana osoba ma po lewej stronie zawsze tego samego, ustalonego, sąsiada* L, *a po prawej stronie tego samego sąsiada* P. Na przykład, w przypadku pięciu osób wszystkie poniższe ustawienia traktujemy jako jednakowe.

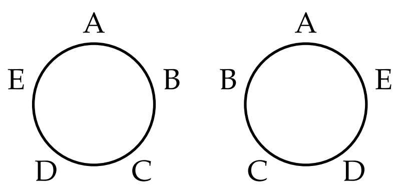


Najpierw ustawiamy osoby w szeregu, co można uczynić na $n!$ sposobów. Następnie „nawijamy" je, niczym koraliki, na okrąg, zaczynając od ustalonego miejsca. (Na naszych rysunkach będzie to punkt najbardziej wysunięty ku górze.) Ponieważ obrócenie całego układu — czyli przesadzenie wszystkich osób w prawo o jednakową liczbę miejsc — nie zmienia ustawienia, otrzymujemy łącznie

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

różnych rozmieszczeń.

(b) *Dwa sposoby rozsadzenia uznajemy za jednakowe, jeśli dana osoba ma tych samych sąsiadów, niezależnie od tego, po której stronie siedzą.* Na przykład, poniższe rozsadzenia uznajemy za równoważne.



W porównaniu z poprzednim przypadkiem, nie tylko obroty całego układu nie zmieniają ustawienia, lecz także „lustrzane” odbicia. Oznacza to, że tym razem liczba różnych ustawień wynosi

$$\frac{1}{2}(n-1)!.$$

7.4. Mamy do czynienia z ciągami dziesięcioelementowymi, indeksowanymi imieniem i nazwiskiem każdej z pytanych osób. Każda osoba może wskazać jeden z 365 dni roku. Oznacza to, że na pierwsze miejsce mamy 365 możliwości wyboru, na drugie również 365, i tak dalej, aż do dziesiątego miejsca. Łączna liczba wszystkich możliwych ciągów wynosi zatem: $365 \cdot 365 \cdot \ldots \cdot 365 = 365^{10}$.

7.5. Każdą liczbę czterocyfrową możemy zapisać w postaci $ABCD$, gdzie A oznacza cyfrę tysięcy, B – cyfrę setek, C – cyfrę dziesiątek oraz D – cyfrę jedności. Z warunków zadania wiemy, że

$$A \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$
$$B \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$
$$C \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\},$$
$$D \in \{0,2,4,6,8\}.$$

(Zauważmy, że $A \neq 0$, ponieważ w przeciwnym razie mielibyśmy liczbę trzycyfrową) Mamy więc 9 możliwości wyboru cyfry tysięcy, po 10 możliwości wyboru cyfry setek i dziesiątek oraz tylko 5 możliwości wyboru cyfry jedności. Oznacza to, że łączna liczba wszystkich czterocyfrowych liczb parzystych wynosi $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$.

7.6. (a) Najpierw ustawiamy 3 dziewczynki, a następnie 4 chłopców. W każdej grupie kolejność ustawienia jest dowolna. Dziewczynki można ustawić na $3!$ sposobów, a chłopców na $4!$ sposobów. Łączna liczba wszystkich możliwych ustawień wynosi zatem: $3! \cdot 4!$.

(b) Najpierw wybieramy chłopca, który stanie na pierwszym miejscu. Możemy to zrobić na 4 sposoby. Pozostaje 6 osób, które ustawiamy w dowolnej kolejności, co daje $6!$ możliwości. Łączna liczba wszystkich możliwych ustawień wynosi zatem: $4 \cdot 6! = 2880$.

(c) Najpierw wybieramy chłopca, który stanie na pierwszym miejscu. Możemy to zrobić na 4 sposoby. Następnie wybieramy chłopca, który stanie na ostatnim miejscu. Teraz mamy już tylko 3 możliwości, ponieważ jeden chłopiec został wybrany wcześniej. Pozostaje 5 osób, które ustawiamy w dowolnej kolejności, co daje $5!$ możliwości. Łączna liczba wszystkich możliwych ustawień wynosi zatem: $4 \cdot 3 \cdot 5! = 1440$.

(d) Zaczynamy od ustawienia dziewczynek. Mamy 3 dziewczynki, które możemy ustawić w dowolnej kolejności na $3!$ sposobów. Między dziewczynkami oraz na końcach powstają 4 „luki”, w które możemy wstawić chłopców tak, aby żaden nie stał obok drugiego. Mamy 4 chłopców i 4 luki, więc każdy chłopiec zajmuje jedną lukę. Liczba możliwych ustawień chłopców wynosi $4!$. Łączna liczba wszystkich możliwych ustawień wynosi zatem: $3! \cdot 4! = 144$.

7.7. Mamy talię 32 kart i chcemy rozdać je trzem graczom po 10 kart, a dwie karty zostają do kupna. Najpierw wybieramy dwie karty, które trafią do banku. Można to zrobić na $\binom{32}{2}$ sposobów. (Zauważmy, że nie jest istotna kolejność kart w banku. Liczy się tylko ich kolor i wartość.) Następnie z pozostałych 30 kart wybieramy 10 kart dla pierwszego gracza na $\binom{30}{10}$ możliwości. Dla drugiego gracza z pozostałych 20 kart wybieramy kolejne 10 na $\binom{20}{10}$ sposobów. Trzeci gracz automatycznie dostaje pozostałe 10 kart. Łączna liczba sposobów rozdania kart wynosi więc:

$$\binom{32}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}.$$

7.8. (a) Traktujemy pasażerów A i B jako jedną „jednostkę”, którą można ustawić w dwóch konfiguracjach AB lub BA. W każdym rzędzie są 4 miejsca, co daje 3 pary sąsiednich miejsc: 1–2, 2–3 i 3–4. Para A–B może zająć dowolną z tych par. Ponieważ mamy dwa rzędy, daje to łącznie $2 \cdot 3 = 6$ sposobów umieszczenia pary A–B. Pozostałe 6 osób możemy rozmieścić dowolnie na wolnych miejscach na $6!$ sposobów. Łączna liczba wszystkich możliwych ustawień wynosi więc: $2 \cdot 6 \cdot 6! = 8640$.

(b) Każde miejsce w pierwszym rzędzie ma dokładnie jedno miejsce naprzeciwko w drugim rzędzie. Ponieważ są 4 miejsca w rzędzie, mamy 4 pary miejsc naprzeciwko siebie. Pasażerowie A i B siadają naprzeciwko siebie i mogą zamienić się miejscami, co daje 2 możliwości ustawienia tej pary. Pozostałe 6 osób można rozmieścić dowolnie na wolnych miejscach na $6! = 720$ sposobów. Łączna liczba wszystkich możliwych ustawień wynosi więc: $4 \cdot 2 \cdot 6! = 5760$.

7.9. (a) Najpierw należy wybrać 10 panów spośród 13, którzy wezmą udział w tańcu. Ponieważ kolejność wyboru nie ma znaczenia (liczy się jedynie sam zbiór wybranych osób), można to zrobić na $\binom{13}{10}$ sposobów. Następnie każdy z wybranych panów dobiera sobie partnerkę spośród 10 pań. Pierwszy ma do wyboru 10 możliwości, drugi – 9, trzeci – 8 i tak dalej, aż do ostatniego, który ma już tylko jedną partnerkę. Liczba wszystkich możliwych skojarzeń par wynosi więc $10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10!$. Ostatecznie całkowita liczba możliwych sposobów utworzenia par tanecznych równa się

$$\binom{13}{10} \cdot 10!.$$

(b) To zadanie różni się od poprzedniego tym, że pary taneczne są numerowane. Wiemy już, że liczba wszystkich możliwych sposobów utworzenia par wynosi

$$\binom{13}{10} \cdot 10!.$$

Teraz należy nadać każdej z utworzonych par numer (np. od 1 do 10). Ponieważ mamy 10 par, sposobów ich ponumerowania jest $10!$ (zgodnie z liczbą permutacji dziesięcioelementowego zbioru). Ostatecznie całkowita liczba możliwych sposobów wyboru i ponumerowania par tanecznych wynosi

$$\binom{13}{10} \cdot 10! \cdot 10!.$$

7.10. Liczbę czterocyfrowych liczb, w których żadna cyfra się nie powtarza, można obliczyć w następujący sposób. Pierwsza cyfra, stojąca na miejscu tysięcy, nie może być zerem, dlatego mamy do wyboru 9 możliwości (od 1 do 9). Po jej ustaleniu druga cyfra może być dowolną spośród pozostałych 9 cyfr, trzecia – spośród 8, a czwarta – spośród 7. Mnożąc te możliwości, otrzymujemy:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

Zatem istnieje dokładnie 4536 czterocyfrowych liczb, w których wszystkie cyfry są różne.

7.11. Mamy łącznie dwadzieścia różnych książek – 8 angielskich, 7 niemieckich i 5 polskich. Chcemy wybrać trzy spośród nich i ustawić je w rzędzie, przy czym kolejność ustawienia się liczy. Najpierw wybieramy pierwszą książkę – mamy dwadzieścia możliwości. Drugą książkę możemy wybrać spośród pozostałych dziewiętnastu, a trzecią spośród osiemnastu. Mnożąc te możliwości otrzymujemy $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$. Zatem istnieje dokładnie 6840 sposobów ustawienia w rzędzie trzech spośród tych książek.

7.12. Rozważmy talię 52 kart, w której znajdują się 4 asy i 4 króle. Chcemy wybrać 13 kart, przy czym spełnione mają być określone warunki.

(a) W przypadku wyboru dokładnie 4 asów, musimy wziąć wszystkie asy, co możemy uczynić tylko na 1 sposób. Pozostałe 9 kart spośród 48 pozostałych kart można wybrać dowolnie, ponieważ kolejność kart w ręce nie ma znaczenia. Można zrobić to na $\binom{48}{9}$ sposobów. Łączna liczba wszystkich możliwych wyborów 13 kart tak, aby były wśród nich 4 asy wynosi

$$1 \cdot \binom{48}{9} = \binom{48}{9}.$$

(b) Jeżeli chcemy, aby w naszym rozdaniu znalazły się dokładnie 2 asy, najpierw wybieramy, które 2 spośród 4 asów znajdą się w rozdaniu. Można to zrobić na $\binom{4}{2}$ sposobów. Następnie dobieramy pozostałe 11 kart spośród 48 kart niebędących asami, co można uczynić na $\binom{48}{11}$ sposobów. Łączna liczba wszystkich możliwych zestawów 13 kart zawierających dokładnie 2 asy wynosi więc:

$$\binom{4}{2}\binom{48}{11}.$$

(c) Jeżeli chcemy, aby w rozdaniu znalazły się dokładnie 2 asy oraz dokładnie 2 króle, postępujemy następująco. Najpierw wybieramy 2 asy spośród 4 dostępnych, co można uczynić na $\binom{4}{2}$ sposobów, a następnie wybieramy 2 króle spośród 4, co również daje $\binom{4}{2}$ możliwości. Pozostałe 9 kart wybieramy spośród 44 kart, które nie są ani asem, ani królem. Można to zrobić na $\binom{44}{9}$ sposobów. Łącznie daje to

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{44}{9}$$

sposobów wyboru kart spełniających te warunki.

7.13. Chcemy wykonać trójkolorowe chorągiewki z sześciu dostępnych barw, przy czym każda chorągiewka składa się z trzech różnych kolorów, a kolejność kolorów ma znaczenie (np. górny, środkowy i dolny pas). Najpierw wybieramy kolor na górny pas – mamy 6 możliwości. Następnie wybieramy kolor na środkowy pas, co możemy zrobić na 5 sposobów. Kolor dolnego pasa wybieramy na 4 sposoby. Łączna liczba różnych trójkolorowych chorągiewek wynosi zatem: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

7.14. Alfabet Morse'a składa się z dwóch znaków: kropki i kreski. Chcemy utworzyć wszystkie możliwe znaki pisarskie o długości co najwyżej 5 elementów. Znak długości 1 można utworzyć na 2 sposoby, długości 2 na $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$ sposoby, długości 3 na $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ sposobów, długości 4 na $2^4 = 16$ sposobów, a długości 5 na $2^5 = 32$ sposoby. Sumując wszystkie możliwości, otrzymujemy $2+4+8+16+32 = 62$. Zatem istnieją dokładnie 62 różne znaki pisarskie o maksymalnej długości 5.

7.15. Rozważmy sytuację: tysiąc osób uczestniczących w festiwalu teatralnym odpowiada na pytanie, które z dziesięciu sztuk stawiają na pierwszym, drugim i trzecim miejscu w swoim rankingu. Każda osoba może wybrać jedną z 10 propozycji na pierwsze miejsce, jedną z 9 na drugie miejsce i jedną z 8 na trzecie miejsce. Zatem istnieje dokładnie $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ możliwych zestawów odpowiedzi. Ponieważ w festiwalu uczestniczy 1000 osób, co najmniej dwie osoby muszą wybrać dokładnie ten sam zestaw trzech sztuk w tej samej kolejności. Nie jest więc możliwe, aby wszyscy uczestnicy podali różne odpowiedzi.

7.16. (a) Jeżeli pudełko nr 1 ma pozostać puste, każda z dziewięciu kul może trafić wyłącznie do pudełka nr 2 lub nr 3. Pierwsza kula ma do wyboru dwa pudełka, druga – również dwa, i tak samo każda kolejna. W efekcie liczba wszystkich możliwych rozmieszczeń kul wynosi: $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^9$.

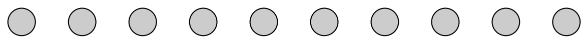
(b) W tym przypadku kula nr 1 ma określone miejsce – pudełko nr 1. Trafia tan na 1 sposób. Pozostałe osiem kul może znaleźć się w dowolnym z trzech pudełek na 3^8 sposobów. (Zobacz rozwiązanie poprzedniego podpunktu.) Łączna liczba rozmieszczeń kul w pudełkach wynosi: $1 \cdot 3^8$.

(c) Najpierw wybieramy, która z dziewięciu kul znajdzie się w pudełku nr 1. Mamy 9 możliwości. Pozostałe osiem kul musi trafić do pudełka nr 2 lub nr 3. Można to zrobić na 2^8 sposobów. Stąd liczba wszystkich rozmieszczeń kul wynosi $9 \cdot 2^8$.

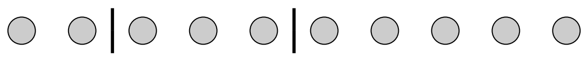
(d) Liczba wszystkich możliwych rozmieszczeń 9 rozróżnialnych kul w 3 ponumerowanych pudełkach 3^9. Liczba tych rozmieszczeń, w których pudełko nr 1 jest puste, to 2^9. Odejmując, otrzymujemy liczbę rozmieszczeń, w których w pudełku nr 1 znajduje się przynajmniej jedna kula: $3^9 - 2^9$.

(e) „Co najwyżej jedna" oznacza, że pudełko nr 1 jest albo puste, albo znajduje się w nim dokładnie jedna kula. Sumując wyniki z podpunktów (a) oraz (c), otrzymujemy $2^9 + 9 \cdot 2^8$.

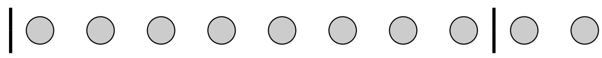
7.17. Wyobraźmy sobie 10 pączków jako 10 kół.



Aby podzielić je między 3 osoby, potrzebujemy 2 kresek, które będą wyznaczać granice między osobami. Na przykład układ



oznacza, że pierwsza osoba otrzymuje 2 pączki, druga 3, a trzecia 5. Możliwy jest także układ,



który oznacza, że pierwsza osoba nie dostała żadnego pączka, druga 8, a trzecia 2. Każde możliwe rozmieszczenie 10 kółek i 2 kresek odpowiada innemu sposobowi rozdania pączków. Upraszczamy zapis i zamieniamy gwiazdki na zera, a kreski na jedynki. Wówczas każde takie rozmieszczenie można przedstawić jako 12-elementowy ciąg zer i jedynek zawierający dokładnie dwie jedynki. Liczbę takich ciągów można obliczyć jako liczbę sposobów wyboru miejsc dla jedynek spośród 12 pozycji, przy czym kolejność wyboru nie ma znaczenia:

$$\binom{12}{2} = 66.$$

Zatem istnieje 66 sposobów rozdania 10 pączków 3 osobom, przy czym dopuszczamy, że niektóre osoby mogą nie otrzymać żadnego pączka.

Uwaga: Zadanie to można również rozwiązać, korzystając ze wzoru na kombinacje z powtórzeniami. W tym ujęciu pączki traktujemy jak nierozróżnialne kule, a osoby jak różne kolory. Mamy więc $n = 3$ osób i $k = 10$ pączków, skąd:

$$\binom{10+3-1}{10} = 66.$$

7.18. (a) Ponieważ kostki są identyczne, możemy traktować je jako nierozróżnialne kule i skorzystać z kombinacji z powtórzeniami. Liczby oczek pełnią rolę różnych kolorów. Mamy więc $n = 6$ możliwych wyników (oczka od 1 do 6) i $k = 3$ kostki. Liczbę różnych wyników, które można otrzymać rzucając trzema identycznymi kostkami jednocześnie, obliczamy jako:

$$\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56.$$

(b) Teraz kostki są rozróżnialne. Możemy założyć, że są pomalowane na trzy różne kolory. W takim przypadku rzuty ⚀⚂⚀ oraz ⚀⚀⚂ traktujemy jako różne, ponieważ pojedyncze oczko pojawia się na różnych kostkach. (W poprzednim podpunkcie byłyby uznane za identyczne.) Zatem mamy do czynienia z trójelementowymi ciągami, których wyrazy pochodzą ze zbioru sześcioelementowego (oczka od 1 do 6). Liczbę różnych wyników rzutu trzema rozróżnialnymi kostkami obliczamy jako: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.

7.19. Rozważmy tydzień składający się z 30 godzin lekcyjnych, przy założeniu, że mogą się w nim odbyć maksymalnie dwie klasówki. Sytuacja, w której w danym tygodniu nie odbędzie się żadna klasówka, jest jednoznaczna. Po prostu nie przypisujemy żadnej godziny. Formalnie można zrobić to na $\binom{30}{0}$ sposobów. Jeżeli w tygodniu zaplanowana jest jedna klasówka, godzinę, podczas której się odbędzie, możemy wybrać na $\binom{30}{1}$ sposób. Natomiast jeśli przewidziane są dwie klasówki, wybieramy dwie lekcje spośród trzydziestu na $\binom{30}{2}$ sposoby. (Kolejność wybrania lekcji nie ma znaczenia.) Uwzględniając wszystkie trzy scenariusze, łączna liczba możliwych wyborów harmonogramu dla jednego tygodnia to

$$\binom{30}{2} + \binom{30}{1} + \binom{30}{0}.$$

Chcemy teraz wybrać godziny przeznaczone na klasówki na 15 tygodni. W każdym tygodniu możemy to zrobić dokładnie w taki sam sposób, a więc łączna liczba możliwych harmonogramów dla wszystkich 15 tygodni wynosi:

$$\left[\binom{30}{2} + \binom{30}{1} + \binom{30}{0}\right]^{15}.$$

7.20. Rozważmy klasę składającą się z 15 dziewcząt i 16 chłopców. Chcemy wybrać pięcioosobową delegację, w której znajdą się dokładnie trzej chłopcy. Zauważmy, że wybierając skład delegacji nie ma znaczenia, w jakiej kolejności to zrobimy. Najpierw wybieramy trzech chłopców spośród szesnastu na $\binom{16}{3}$ sposobów. Następnie wybieramy dwie dziewczęta spośród piętnastu na $\binom{15}{2}$ sposoby. Łączna liczba sposobów utworzenia takiej delegacji wynosi zatem

$$\binom{16}{3}\binom{15}{2}.$$

7.21. Wielokąt ma n wierzchołków, więc liczbę wszystkich odcinków (zarówno krawędzi, jak i przekątnych) można policzyć jako liczbę sposobów wyboru (zbioru) dwóch różnych wierzchołków. Jest to $\binom{n}{2}$. Wypukły n-kąt ma n krawędzi, które nie są przekątnymi. Aby obliczyć liczbę przekątnych, wystarczy od całkowitej liczby odcinków odjąć liczbę krawędzi:

$$\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{1}{2}n(n-3).$$

7.22. Rozważmy sześć różnych punktów zaznaczonych na okręgu. Chcemy policzyć, ile różnych wielokątów można utworzyć tak, aby ich wierzchołki były wyłącznie tymi punktami. Najmniejszy możliwy wielokąt to trójkąt, a największy sześciokąt obejmujący wszystkie punkty. Najpierw wyznaczamy liczbę możliwych trójkątów, wybierając 3 wierzchołki spośród 6 na $\binom{6}{3} = 20$ sposobów. Następnie wybieramy 4 wierzchołki spośród 6 na $\binom{6}{4} = 15$ sposobów. Dla pięciokątów wybieramy 5 wierzchołków spośród 6 na $\binom{6}{5} = 6$ sposobów. Wreszcie sześciokąt powstaje przez wzięcie wszystkich 6 punktów. Można to zrobić na dokładnie jeden sposób. Sumując wszystkie te przypadki, otrzymujemy $20 + 15 + 6 + 1 = 42$. Oznacza to, że z sześciu punktów na okręgu można utworzyć dokładnie 42 różne wielokąty.

7.23. Każde powitanie zachodzi między dwiema różnymi osobami, a kolejność nie ma znaczenia (powitanie A z B to to samo co B z A). Zatem każde powitanie możemy traktować jako dwuelementowy podzbiór zbioru sześciu osób. Oznacza to, że łącznie nastąpi

$$\binom{6}{2} = 15$$

powitań.

7.24. Cztery osoby wchodzą do tramwaju przez jedno wejście, a każda możliwa kolejność wchodzenia traktowana jest jako odrębny sposób. Pierwszą osobą może być dowolna z czterech, drugą – dowolna z pozostałych trzech, trzecią – dowolna z dwóch pozostałych, a czwarta osoba wchodzi jako ostatnia. Łączna liczba możliwych kolejności wynosi więc:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24.$$

Oznacza to, że istnieją dokładnie 24 różne sposoby, w jakie cztery osoby mogą wejść do tramwaju przez jedno wejście, przy uwzględnieniu kolejności wchodzenia.

7.25. Zadanie to rozwiążemy, korzystając ze wzoru na kombinacje z powtórzeniami. W tym ujęciu różne rodzaje owoców traktujemy jak różne kolory, natomiast poszczególne owoce w obrębie jednego rodzaju są nierozróżnialne – przykładowo wszystkie jabłka są identyczne. Mamy więc $n = 4$ i $k = 5$, skąd:

$$\binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5} = 56.$$

Oznacza to, że istnieje 56 różnych sposobów przygotowania paczki.

7.26. Mamy 10 punktów w przestrzeni trójwymiarowej, przy czym żadne trzy punkty nie leżą na jednej prostej. Każda trójka punktów wyznacza dokładnie jedną płaszczyznę. Zatem liczbę różnych płaszczyzn można policzyć jako liczbę wszystkich możliwych trójek punktów:

$$\binom{10}{3} = 120.$$

7.27. Rzucamy dwa razy kostką sześcienną i trzy razy monetą. Każdy rzut kostką może dać 6 różnych wyników, a ponieważ rzuty są rozróżnialne, liczba wszystkich możliwych wyników dwóch rzutów kostką wynosi $6 \cdot 6 = 36$. Każdy rzut monetą może dać 2 możliwe wyniki – orła lub reszkę. Trzy rzuty monetą dają zatem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ możliwych układów wyników. Zgodnie z zasadą mnożenia, każdy wynik rzutów kostką można połączyć z każdym wynikiem rzutów monetą. W rezultacie liczba wszystkich różnych wyników w tym doświadczeniu losowym wynosi $36 \cdot 8 = 288$.

7.28. W turnieju warcabowym bierze udział siedmiu zawodników. Chcemy, aby każdy zagrał z każdym innym zarówno czarnymi, jak i białymi bierkami. Najpierw obliczamy liczbę wszystkich możliwych par zawodników. Każda partia wymaga dwóch graczy, a liczbę par spośród siedmiu zawodników można wyznaczyć ze wzoru na kombinacje: $\binom{7}{2}$. Ponieważ każda para rozgrywa dwie partie – raz białymi, raz czarnymi bierkami – całkowita liczba partii wynosi

$$\binom{7}{2} \cdot 2 = 42.$$

Oznacza to, że aby każdy zawodnik zagrał z każdym innym przy obu kolorach, należy rozegrać 42 partie.

7.29. (a) Korzystając ze wzoru na kombinacje z powtórzeniami dla $n = 4$ oraz $k = 25$, otrzymujemy, że liczba różnych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych wynosi

$$\binom{25 + 4 - 1}{4 - 1} = \binom{28}{3} = 3276.$$

(b) Tym razem szukany rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ w zbiorze liczb naturalnych. Wprowadzając nowe zmienne $y_i := x_i - 1$, sprowadzamy powyższe równanie do postaci

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 21,$$

przy czym teraz szukamy rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych. Zatem liczba różnych rozwiązań pierwotnego równania wynosi

$$\binom{4 + 21 - 1}{21} = \binom{24}{21} = 2024.$$

7.30. Chcemy ustalić, na ile sposobów można potasować talię 52 kart tak, aby wszystkie cztery asy znajdowały się obok siebie. W tym celu traktujemy je jako jeden element (blok), który w obrębie siebie można ułożyć na $4! = 24$ różne sposoby. Pozostałe 48 kart razem z blokiem asów tworzą 49 elementów, które można ustawić w dowolnej kolejności, co daje 49! możliwości. Łączna liczba tasowań spełniających warunek, że wszystkie asy sąsiadują, wynosi zatem: $49! \cdot 4!$.

Literatura

Bibliografia. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- A. Cewe, H. Nahorska, I. Pancer, *Tablice matematyczne*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 2000.
- T. Gerstenkorn, T. Śródka, *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1983.
- T. Górecki, *Ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa*, Poznań, 2012.
- J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Script, Warszawa, 2001.
- M. Krzyśko, *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2000.

- Z. Palka, A. Ruciński, *Wykłady z kombinatoryki: przeliczanie*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1998.
- A. Ruciński, *Są szanse, że... Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa*, Poznań, 2008.
- J. Rutkowski, *Kombinatoryka – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.
- Ł. Smaga, *Ćwiczenia z rachunku prawdopodobieństwa*, Poznań, 2012.
- B. Tomasz, *Elementy kombinatoryki*: *zadania do wyboru – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.
- W. Wołyński, *Prawdopodobieństwo i statystyka. Zadania z egzaminów dla aktuariuszy z rozwiązaniami* (*2003-2007*), Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2008.
- A. Zalewska, E. Stachowski, *I ty zostaniesz Euklidesem II. Zbiór zadań z matematyki dla klasy drugiej liceum i technikum. Zakres rozszerzony i zakres podstawowy*, Oficyna Wydawniczo-Poligraficzna „Adam”, Warszawa 2003.