Rozdział 5

Znak sumy wzór dwumianowy Newtona

Teoria

<u>Znak sumy</u>. Rozważmy skończony ciąg liczb $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Sumę $a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$ wszystkich elementów tego ciągu możemy skrótowo zapisać za pomocą wielkiej litery sigma $\sum$ w postaci

$$\sum_{i=m}^{n} a_i.$$

Wskaźnik i nazywamy *wskaźnikiem sumowania*, natomiast m nazywamy *dolną granicą sumowania*, a n – *górną granica sumowania*.

<u>Własności znaku sumy</u>. Znak sumy ma następujące własności:

- $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$, gdzie $m \leqslant k < n$,
- $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$,
- $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \cdot \sum_{i=m}^{n} a_i$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$.

<u>Silnia</u>. Dla każdej liczby całkowitej nieujemnej n *silnią* nazywamy liczbę $n!$ zdefiniowaną wzorem

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ (n-1)! \cdot n & \text{dla } n \geqslant 1. \end{cases}$$

W szczególności: $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ oraz $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Wyrażenie $n!$ czytamy jako „n silnia”.

<u>Symbol Newtona</u>. Dla dowolnych liczb całkowitych nieujemnych n, k takich, że $0 \leqslant k \leqslant n$ *symbol Newtona* $\binom{n}{k}$ definiujemy wzorem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Wyrażenie $\binom{n}{k}$ czytamy jako „n po k”.

Wzór dwumianowy Newtona. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b oraz dowolnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *wzorem dwumianowym Newtona* nazywamy równość

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Wykorzystując znak sumy wzór dwumianowy Newtona można zapisać w postaci

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Współczynniki wzoru dwumianowego można obliczyć korzystając z *trójkąta Pascala*.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Zadania

Zadanie 5.1. Korzystając ze znaku $\sum$ zapisz następujące sumy:

(a) $4+5+6+7+8+9$,

(b) $7+8+9+10+11+12$,

(c) $1-2+3-4+5-6$,

(d) $-2+3-4+5-6+7$,

(e) $2+4+8+16+32+64+128$,

(f) $3+9+27+81+243$,

(g) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[5]{5}+\sqrt[6]{6}+\sqrt[7]{7}+\sqrt[8]{8}$,

(h) $5!+6!+7!+8!+9!+10!+11!+12!$,

(i) $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x$,

(j) $-\cos x + 2\cos\frac{1}{2}x - 3\cos\frac{1}{3}x + 4\cos\frac{1}{4}x$.

Zadanie 5.2. Oblicz następujące sumy:

(a) $\displaystyle\sum_{i=-1}^{2} 3i^2$,

(b) $\displaystyle\sum_{i=-2}^{1} 2i^3$,

(c) $\displaystyle\sum_{i=3}^{7} (-1)^{i+1}$,

(d) $\displaystyle\sum_{i=2}^{6} (-1)^{i-1}$,

(e) $\displaystyle\sum_{i=-1}^{4} (2i-1)$,

(f) $\displaystyle\sum_{i=-4}^{1} (2i+1)$,

(g) $\displaystyle\sum_{i=0}^{4n-1} \sin\frac{1}{2}i\pi$,

(h) $\displaystyle\sum_{i=0}^{4n-1} \cos\frac{1}{2}i\pi$.

Zadanie 5.3. Oblicz

(a) $\binom{7}{1}$, (b) $\binom{6}{5}$, (c) $\binom{5}{3}$, (d) $\binom{6}{3}$, (e) $\binom{9}{4}$, (f) $\binom{10}{3}$.

Zadanie 5.4. Uzasadnij, że dla dowolnych liczb naturalnych n, k takich, że $1 \leqslant k \leqslant n$ zachodzi równość
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Zadanie 5.5. Zapisz rozwinięcie według wzoru dwumianowego Newtona dla

(a) $(2-\sqrt{3})^4$, (c) $(x-1)^5$, (e) $(a-b)^6$,

(b) $(\sqrt{2}-3)^4$, (d) $(1-x)^6$, (f) $(a-b)^5$.

Zadanie 5.6. Wyznacz wartość wyrazu stałego w rozwinięciu wyrażenia $(1+x+x^{-1})^8$.

Zadanie 5.7. Uzasadnij, która z podanych liczb a czy b jest większa

(a) $a = (1 + 0{,}000001)^{1\,000\,000}$, $b = 2$, (b) $a = 1000^{1000}$, $b = 1001^{999}$.

Rozwiązania

5.1. (a) $4+5+6+7+8+9 = \sum_{i=4}^{9} i$

(b) $7+8+9+10+11+12 = \sum_{i=7}^{12} i$

(c) $1-2+3-4+5-6 = \sum_{i=1}^{6} (-1)^{i+1} i$

(d) $-2+3-4+5-6+7 = \sum_{i=2}^{7} (-1)^{i+1} i$

(e) $2+4+8+16+32+64+128 = 2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7 = \sum_{i=1}^{7} 2^i$

(f) $3+9+27+81+243 = 3^1+3^2+3^3+3^4+3^5 = \sum_{i=1}^{5} 3^i$

(g) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[5]{5}+\sqrt[6]{6}+\sqrt[7]{7}+\sqrt[8]{8} = \sum_{i=2}^{8} \sqrt[i]{i}$

(h) $5!+6!+7!+8!+9!+10!+11!+12! = \sum_{i=5}^{12} i!$

(i) $\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x = \sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^{i+1}}{i}\sin(ix)$

(j) $-\cos x + 2\cos\frac{1}{2}x - 3\cos\frac{1}{3}x + 4\cos\frac{1}{4}x = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i i \cos\frac{x}{i}$

5.2. (a) $\sum_{i=-1}^{2} 3i^2 = 3\cdot(-1)^2 + 3\cdot 0^2 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 = 3+0+3+12 = 18$

(b) $\sum_{i=-2}^{1} 2i^3 = 2\cdot(-2)^3 + 2\cdot(-1)^3 + 2\cdot 0^3 + 2\cdot 1^3 = -16-2+0+2 = -16$

(c)
$$\begin{aligned}\sum_{i=3}^{7}(-1)^{i+1} &= (-1)^{3+1} + (-1)^{4+1} + (-1)^{5+1} + (-1)^{6+1} + (-1)^{7+1}\\ &= (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8\\ &= 1-1+1-1+1 = 1\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{6}(-1)^{i-1} &= (-1)^{2-1} + (-1)^{3-1} + (-1)^{4-1} + (-1)^{5-1} + (-1)^{6-1}\\ &= (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5\\ &= -1+1-1+1-1 = -1\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}\sum_{i=-1}^{4}(2i-1) &= [2\cdot(-1)-1] + (2\cdot 0-1) + (2\cdot 1-1)\\ &\quad + (2\cdot 2-1) + (2\cdot 3-1) + (2\cdot 4-1)\\ &= -3 + (-1) + 1 + 3 + 5 + 7 = 12\end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned}\sum_{i=-4}^{1}(2i+1) &= [2\cdot(-4)+1] + [2\cdot(-3)+1] + [2\cdot(-2)+1]\\ &\quad + [2\cdot(-1)+1] + (2\cdot 0+1) + (2\cdot 1+1)\\ &= -7 + (-5) + (-3) + (-1) + 1 + 3 = -12\end{aligned}$$

(g) Przypomnijmy, że $\sin 0 = \sin\pi = 0$. Ponadto $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$ oraz $\sin\frac{3}{2}\pi = -1$. Korzystając z faktu, że funkcja sinus jest 2π-okresowa możemy powyższe równości uogólnić. I tak dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\sin k\pi = 0, \quad \sin\frac{4k-1}{2}\pi = -1, \quad \sin\frac{4k+1}{2}\pi = 1.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{4n-1}\sin\frac{1}{2}i\pi &= \sin 0 + \sin\frac{1}{2}\pi + \sin\pi + \sin\frac{3}{2}\pi\\ &\quad + \sin 2\pi + \sin\frac{5}{2}\pi + \sin 3\pi + \sin\frac{7}{2}\pi\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad + \sin(2n-2)\pi + \sin\frac{4n-3}{2}\pi + \sin(2n-1)\pi + \sin\frac{4n-1}{2}\pi\\ &= (0+1+0-1) + (0+1+0-1) + \cdots + (0+1+0-1) = 0.\end{aligned}$$

(h) Przypomnijmy, że $\cos\frac{1}{2}\pi = \cos\frac{3}{2}\pi = 0$. Ponadto $\cos 0 = 1$ oraz $\cos\pi = -1$. Korzystając z faktu, że funkcja cosinus jest 2π-okresowa możemy powyższe równości uogólnić. I tak dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\cos\frac{4k-1}{2}\pi = \cos\frac{4k-3}{2}\pi = 0, \quad \cos\frac{2}{k}\pi = 1, \quad \cos(2k-1)\pi = -1.$$

Zatem

$$\sum_{i=0}^{4n-1}\cos\frac{1}{2}i\pi = \cos 0 + \cos\frac{1}{2}\pi + \cos\pi + \cos\frac{3}{2}\pi$$
$$+\cos 2\pi + \cos\frac{5}{2}\pi + \cos 3\pi + \cos\frac{7}{2}\pi$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\cos(2n-2)\pi + \cos\frac{4n-3}{2}\pi + \cos(2n-1)\pi + \cos\frac{4n-1}{2}\pi$$
$$= (1+0-1+0) + (1+0-1+0) + \cdots + (1+0-1+0) = 0.$$

5.3. (a) $\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!\cdot 6!} = \frac{7}{1} = 7$

(b) $\binom{6}{5} = \frac{6!}{5!\cdot 1!} = \frac{6}{1} = 6$

(c) $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

(d) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$

(e) $\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 126$

(f) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$

5.4. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ oraz $1 \leqslant k \leqslant n$ na podstawie definicji symbolu Newtona mamy

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)![n-(k-1)]!} + \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= \frac{n!k + n!(n+1-k)}{k![(n+1)-k]!}$$
$$= \frac{n!(n+1)}{k![(n+1)-k]!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{k![(n+1)-k]!} = \binom{n+1}{k}.$$

5.5. (a) $(2-\sqrt{3})^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^{4-k}(-\sqrt{3})^k$

$$= 16 - 4\cdot 8\cdot\sqrt{3} + 6\cdot 4\cdot 3 - 4\cdot 2\cdot 3\sqrt{3} + 9$$
$$= 97 - 56\sqrt{3}$$

(b) $(\sqrt{2}-3)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(\sqrt{2})^{4-k}(-3)^k$

$$= 4 - 4\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3 + 6\cdot 2\cdot 9 - 4\cdot\sqrt{2}\cdot 27 + 81$$
$$= 193 - 132\sqrt{2}$$

(c) $(x-1)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}x^{5-k}(-1)^k$

$$= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

(d) $$(1-x)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (-x)^k = 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6$$

(e) $$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} a^{6-k}(-b)^k = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

(f) $$(a-b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k}(-b)^k = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

5.6. Niech $t = x + x^{-1}$. Wtedy wyrażenie $(1 + x + x^{-1})^8$ możemy zapisać jako

$$(1+t)^8 = 1 + 8t + 28t^2 + 56t^3 + 70t^4 + 56t^5 + 28t^6 + 8t^7 + t^8,$$

gdzie

$$t^k = (x + x^{-1})^k = x^k + kx^{k-2} + \cdots + \binom{k}{m} x^{k-2m} + \ldots + x^{-k}$$

oraz $k = 1, 2, \ldots, 8$. Zauważmy, że w rozwinięciu t^k pojawi się wyraz stały (liczba), gdy k będzie liczbą parzystą. Zatem sytuacja taka wydarzy się dokładnie cztery razy. Gdy $k = 2$, wyraz stały pojawi się na miejscu $m = 1$. (Przypomnijmy, że w rozwinięciu ze wzoru dwumianowego Newtona miejsca liczymy od zera.) Gdy $k = 4$, wyraz stały pojawi się na miejscu $m = 2$. I dalej, dla $k = 6$ będzie to miejsce $m = 3$, a dla $k = 8$ miejsce $m = 4$. Oznacza to, że wyraz stały w rozwinięciu $(1 + x + x^{-1})^8$ będzie równy

$$1 + 28\binom{2}{1} + 70\binom{4}{2} + 28\binom{6}{3} + \binom{8}{4} = 1107.$$

5.7. (a) Zauważmy, że ze wzoru dwumianowego Newtona mamy

$$\begin{aligned} a &= (1 + 0{,}000001)^{1\,000\,000} \\ &= 1^{1\,000\,000} + 1\,000\,000 \cdot 1^{999\,999} \cdot 0{,}000001 + \text{inne dodatnie składniki} \\ &= 1 + 1 + \text{inne dodatnie składniki} > 2 = b. \end{aligned}$$

Zatem $a > b$.

(b) Ze wzoru dwumianowego Newtona mamy

$$\begin{aligned} b &= (1000 + 1)^{999} \\ &= 1000^{999} + 999 \cdot 1000^{998} \cdot 1 + \binom{999}{2} \cdot 1000^{997} \cdot 1^2 + \binom{999}{3} \cdot 1000^{996} \cdot 1^3 \\ &\quad + \ldots + \binom{999}{997} \cdot 1000^2 \cdot 1^{997} + \binom{999}{998} \cdot 1000 \cdot 1^{998} + 1. \end{aligned}$$

Zauważmy również, że

$$\binom{999}{2} = \frac{999!}{997! \cdot 2!} = \frac{999 \cdot 998}{2!} < 999 \cdot 998 < 1000^2$$

oraz

$$\binom{999}{3} = \frac{999!}{996! \cdot 3!} = \frac{999 \cdot 998 \cdot 997}{3!} < 999 \cdot 998 \cdot 997 < 1000^3.$$

Podobnie,

$$\binom{999}{k} < 1000^k$$

dla $k = 1, 2, \ldots, 999$. Ponieważ w rozwinięciu liczby b występuje 1000 składników i każdy można z góry oszacować przez 1000^{999}, otrzymujemy

$$b < 1000 \cdot 1000^{999} = 1000^{1000} = a.$$

Literatura

Bibliografia. Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.
- E. Grigorieva, *Methods of solving nonstandard problems*, Birkhäuser, 2015.
- L. Jeśmianowicz, J. Łoś, *Zbiór zadań z algebry*, PWN, Warszawa, 1959.
- S. G. Krantz, *Techniques of problem solving*, American Mathematical Society, 1996.
- J. Musielak, *Wstęp do matematyki*, PWN, Warszawa, 1970.
- *Symbol sumy, iloczynu, dwumian Newtona, indukcja matematyczna – materiały do ćwiczeń z Repetytorium z matematyki elementarnej*, Poznań, 2015.