Rozdział 3

# Podstawowy teorii zbiorów

## Teoria

<u>Symbole teorii mnogości</u>. Język teorii mnogości zawiera wszystkie symbole logiczne oraz następujące symbole:

- symbol *równości* $=$,
- symbol *zbioru pustego* (tzn. zbioru nieposiadającego żadnego elementu) $\emptyset$,
- symbol *przynależności* elementu do zbioru $\in$; wyrażenie $x \in A$ czytamy jako "$x$ jest elementem zbioru $A$" lub "$x$ należy do $A$".
- symbol *inkluzji* (zawierania) $\subseteq$; wyrażenie $A \subseteq B$ oznacza, że zbiór $A$ zawiera się w zbiorze $B$, tzn. każdy element zbioru $A$ jest również elementem zbioru $B$ (formalnie zawieranie możemy zdefiniować następująco: $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\, (x \in A \to x \in B)$).

<u>Podzbiory</u>. Zbiór $A$ nazywamy *podzbiorem* zbioru $B$, gdy $A \subseteq B$. W takiej sytuacji zbiór $B$ nazywamy też *nadzbiorem* zbioru $A$. Można pokazać, że każdy zbiór $n$-elementowy posiada dokładnie $2^n$ podzbiorów.

<u>Zasada ekstensjonalności</u>. Dwa zbiory $A$ i $B$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie te same elementy, tzn. $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$.

<u>Działania na zbiorach</u>. Dla danych zbiorów $A$ i $B$ przyjmujemy następujące definicje:

- *suma* zbiorów $A$ i $B$ jest to zbiór $A \cup B$ spełniający warunek: $x \in A \cup B \;\leftrightarrow\; x \in A \vee x \in B$, czyli $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,
- *przekrój* (*iloczyn*, *część wspólna*) zbiorów $A$ i $B$ jest to zbiór $A \cap B$ spełniający warunek: $x \in A \cap B \;\leftrightarrow\; x \in A \wedge x \in B$, czyli $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,
- *różnica* zbiorów $A$ i $B$ jest to zbiór $A \setminus B$ spełniający warunek: $x \in A \setminus B \;\leftrightarrow\; x \in A \wedge x \notin B$, czyli $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

<u>Działania uogólnione (nieskończone)</u>. Niech $\{A_i\}_{i \in I}$ będzie rodziną zbiorów. (Tutaj $I$ oznacza dowolną rodzinę wskaźników.)

- *Sumą* rodziny $\{A_i\}_{i \in I}$ nazywamy zbiór $\bigcup_{i \in I} A_i$ spełniający następujący warunek: $x \in \bigcup_{i \in I} A_i \;\leftrightarrow\; \exists\, i \in I\, (x \in A_i)$, czyli $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists\, i \in I\, (x \in A_i)\}$.

- *Przekrojem* rodziny $\{A_i\}_{i\in I}$ nazywamy zbiór $\bigcap_{i\in I} A_i$ spełniający następujący warunek: $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \;\leftrightarrow\; \forall\, i \in I\ (x \in A_i)$, czyli $\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \forall\, i \in I\ (x \in A_i)\}$.

<u>Iloczynem kartezjańskim</u> zbiorów $A$ i $B$ nazywamy zbiór $A \times B$ składający się ze wszystkich uporządkowanych par $(a, b)$ takich, że $a \in A$ oraz $b \in B$. Dwa elementy $(a_1, b_1)$ i $(a_2, b_2)$ iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ uznajemy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$ oraz $b_1 = b_2$.

## Zadania

**Zadanie 3.1.** Znajdź zbiór, który jest różny od pozostałych. Odpowiedź uzasadnij.

(a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 1, 2, 1, 2, 1, 2\}$, $C = \left\{n \in \mathbb{N} : n^2 \leqslant 4\right\}$, $D = \left\{k \in \mathbb{Z} : k^2 \leqslant 4\right\}$,

(b) $A = \emptyset$, $B = \left\{n \in \mathbb{N} : n^2 - 2n + 4 = 0\right\}$, $C = \left\{\emptyset\right\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} : x = x \ \wedge\ x \neq x\}$.

**Zadanie 3.2.** Zbadaj jakie relacje inkluzji (zawierania) zachodzą między następującymi zbiorami $A$ i $B$:

(a) $A$ to zbiór kwadratów, a $B$ to zbiór prostokątów,

(b) $A$ to zbiór trójkątów równoramiennych, a $B$ to zbiór trójkątów równobocznych,

(c) $A = \{a, b, c, d\}$ oraz $B = \{a, c, d\}$,

(d) $A = \{x, y, z\}$ oraz $B = \{z, y, w, x\}$,

(e) $A = \{a, b\}$ oraz $B = \left\{b, \{a\}\right\}$,

(f) $A = \left\{a, \{a\}\right\}$ oraz $B = \{a, b, \emptyset\}$,

(g) $A$ to zbiór wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = ax + b$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$, a $B$ to zbiór wszystkich funkcji $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $g(x) = x + c$ dla pewnego $c \in \mathbb{N}$.

**Zadanie 3.3.** Zbadaj jakie relacje inkluzji (zawierania) zachodzą pomiędzy zbiorami $A$, $B$ oraz $C$:

(a) $A$ to zbiór liczb naturalnych podzielnych przez sześć,
$B$ to zbiór liczb naturalnych podzielnych przez trzy,
$C$ to zbiór liczb naturalnych parzystych,

(b) $A$ to zbiór osób z wykształceniem co najmniej podstawowym,
$B$ to zbiór osób z wykształceniem co najmniej średnim,
$C$ to zbiór osób z wykształceniem wyższym.

**Zadanie 3.4.** Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ oraz $B \setminus A$ dla następujących zbiorów. (W podpunktach (g) i (h) zakładamy, że różne litery $a, b, c$ oznaczają różne obiekty.)

(a) $A = (0, 1]$ oraz $B = [-1, 2)$,

(b) $A = [-2, 1)$ oraz $B = (0, 3]$,

(c) $A = [0, 2]$ oraz $B = (-\infty, 1)$,

(d) $A = [3, +\infty)$ oraz $B = (2, 6)$,

(e) $A = \{k \in \mathbb{Z} : 2|k\}$ oraz $B = [-2, 4)$,

(f) $A = \{k \in \mathbb{Z} : 3|k\}$ oraz $B = (-6, 3]$,

(g) $A = \big\{a, b, \{c\}\big\}$ oraz $B = \{a, b, c\}$,

(h) $A = \big\{\{a, b\}, c\big\}$ oraz $B = \{a, c\}$.

**Zadanie 3.5.** Wykaż, że dla dowolnych zbiorów $A, B, C$ zachodzą następujące wzory:

(a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

(d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

**Zadanie 3.6.** Niech $A, B, C$ będą zbiorami skończonymi oraz niech $|A|$ oznacza liczebność zbioru $A$. Korzystając z diagramów Venna, wykaż że

(a) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$,

(b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

**Zadanie 3.7.** Wśród 30 osób starających się o pracę w firmie komputerowej:

- 2 osoby mają ponad 40 lat, wyższe studia informatyczne i doświadczenie,
- 5 osób ma wyższe studia informatyczne i doświadczenie,
- 3 mają ponad 40 lat i wyższe studia informatyczne,
- 6 osób ma ponad 40 lat i doświadczenie,
- 10 osób jest w wieku powyżej 40 lat,
- 15 ma doświadczenie,
- 12 ma studia informatyczne.

Posługując się diagramami Venna, odpowiedz na poniższe pytania:

(a) Ilu ze starających się o pracę nie ma żadnej z rozważanych cech?

(b) Ilu nie ma ani wyższych studiów informatycznych ani doświadczenia?

(c) Ile osób mających powyżej 40 lat i wyższe studia informatyczne nie ma doświadczenia?

**Zadanie 3.8.** Pokaż, że wśród $2^{n-1} + 1$ różnych podzbiorów zbioru $n$-elementowego istnieją co najmniej dwa zbiory rozłączne.

**Zadanie 3.9.** Wypisz wszystkie elementy iloczynu kartezjańskiego $A \times B$, jeżeli

(a) $A = \{-1, 0, 1\}$ oraz $B = \{1, 3\}$,

(b) $A = \{-3, 2\}$ oraz $B = \{1, 2, 4\}$,

(c) $A = \{a\}$ oraz $B = \{a, b, c, d\}$.

(d) $A = \{a, b, c, d\}$ oraz $B = \{b\}$.

**Zadanie 3.10.** W dwuwymiarowym układzie współrzędnych $\mathbb{R}^2$ narysuj zbiór $A \times B$, jeżeli

(a) $A = [1, 2)$ oraz $B = (0, 1]$,

(b) $A = [0, 2)$ oraz $B = [1, 2)$,

(c) $A = [-1, 1)$ oraz $B = (-\infty, 2]$,

(d) $A = (-\infty, 1)$ oraz $B = (1, 2)$,

(e) $A = (-\infty, 1]$ oraz $B = (0, +\infty)$,

(f) $A = (0, +\infty)$ oraz $B = (-\infty, 1]$,

(g) $A = (-2, 3]$ oraz $B = \{-1, 1\}$,

(h) $A = \{-2, 1\}$ oraz $B = [1, 2)$.

**Zadanie 3.11.** W dwuwymiarowym układzie współrzędnych $\mathbb{R}^2$ narysuj następujące zbiory:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 6x + 3y - 3 \leqslant 0\}$,

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 4x - 6 > 0\}$,

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 < 1\}$,

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y \leqslant 0\}$,

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$,

(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant 9\}$.

**Zadanie 3.12.** Wyznaczyć nieskończone sumy i przekroje następujących zbiorów $A_i$ indeksowanych zbiorem wskaźników I:

(a) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : -i \leqslant x \leqslant i\}$ oraz $I = \mathbb{N}$,

(b) $A_i = \{x \in \mathbb{R} : i \leqslant x \leqslant i + 1\}$ oraz $I = \mathbb{N}$,

(c) $A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{1+i}\right\}$ oraz $I = [0, +\infty)$,

(d) $A_i = \left\{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 1 + \frac{1}{i}\right\}$ oraz $I = [1, +\infty)$,

(e) $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = i \cdot x\}$ oraz $I = \mathbb{R}$,

(f) $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + i\}$ oraz $I = \mathbb{R}$.

(g) $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geqslant i^2\}$ oraz $I = \mathbb{N}$,

(h) $A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant i^2\}$ oraz $I = \mathbb{N}$.

## Rozwiązania

**3.1.** (a) Mamy $A = B = C = \{1, 2\}$ i $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Niepasującym zbiorem jest więc zbiór D.

(b) Mamy $A = B = D = \emptyset$ oraz $C = \{\emptyset\}$. Niepasującym zbiorem jest więc zbiór C, gdyż składa się on z jednego elementu, podczas gdy pozostałe nie mają żadnych elementów.

**3.2.** (a) $A \subseteq B$ oraz $\neg B \subseteq A$

(b) $B \subseteq A$ oraz $\neg A \subseteq B$

(c) $B \subseteq A$ oraz $\neg A \subseteq B$

(d) $A \subseteq B$ oraz $\neg B \subseteq A$

(e) $\neg A \subseteq B$ oraz $\neg B \subseteq A$

(f) $\neg A \subseteq B$ oraz $\neg B \subseteq A$

(g) $B \subseteq A$ oraz $\neg A \subseteq B$

**3.3.** (a) Mamy $A = B \cap C$. Wynika stąd, że $A \subseteq B$ oraz $A \subseteq C$; przeciwne inkluzje nie zachodzą.

(b) $C \subseteq B \subseteq A$

**3.4.** (a) $A \cup B = [-1, 2)$, $A \cap B = (0, 1]$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = [-1, 0] \cup (1, 2)$

(b) $A \cup B = [-2, 3]$, $A \cap B = (0, 1)$, $A \setminus B = [-2, 0]$, $B \setminus A = [1, 3]$

(c) $A \cup B = (-\infty, 2]$, $A \cap B = [0, 1)$, $A \setminus B = [1, 2]$, $B \setminus A = (-\infty, 0)$

(d) $A \cup B = (2, +\infty)$, $A \cap B = [3, 6)$, $A \setminus B = [6, +\infty)$, $B \setminus A = (2, 3)$

(e) $A \cup B = \{\ldots, -8, -6, -4\} \cup [-2, 4] \cup \{6, 8, \ldots\}$, $A \cap B = \{-2, 0, 2\}$, $A \setminus B = \{\ldots, -8, -6, -4\} \cup \{4, 6, 8, \ldots\}$, $B \setminus A = (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 4)$

(f) $A \cup B = \{\ldots, -12, -9\} \cup [-6, 3] \cup \{6, 9, 12 \ldots\}$, $A \cap B = \{-3, 0, 3\}$, $A \setminus B = \{\ldots, -12, -9, -6\} \cup \{6, 9, 12, \ldots\}$, $B \setminus A = (-6, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3)$

(g) $A \cup B = \big\{a, b, c, \{c\}\big\}$, $A \cap B = \{a, b\}$, $A \setminus B = \big\{\{c\}\big\}$, $B \setminus A = \{c\}$ (h) $A \cup B = \big\{a, c, \{a, b\}\big\}$, $A \cap B = \{c\}$, $A \setminus B = \big\{\{a, b\}\big\}$, $B \setminus A = \{a\}$

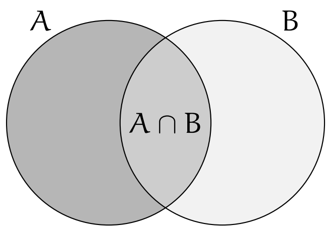
**3.5.** (a)
$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in (B \cap C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge x \in C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (\neg x \in B \vee \neg x \in C) \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (x \in A \wedge \neg x \in C) \\ &\leftrightarrow (x \in A \setminus B) \vee (x \in A \setminus C) \\ &\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cup C) &\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg x \in (B \cup C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \\ &\leftrightarrow x \in A \wedge (\neg x \in B \wedge \neg x \in C) \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge \neg x \in B) \wedge (x \in A \wedge \neg x \in C) \\ &\leftrightarrow (x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C) \\ &\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \setminus C &\leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge \neg x \in C \\ &\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge \neg x \in C \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge \neg x \in C) \vee (x \in B \wedge \neg x \in C) \\ &\leftrightarrow (x \in A \setminus C) \vee (x \in B \setminus C) \\ &\leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \setminus C &\leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge \neg x \in C \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge \neg x \in C \\ &\leftrightarrow (x \in A \wedge \neg x \in C) \wedge (x \in B \wedge \neg x \in C) \\ &\leftrightarrow (x \in A \setminus C) \wedge (x \in B \setminus C) \\ &\leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \end{aligned}$$

**3.6**. Rozważymy jedynie pierwszy przypadek. Rozumowanie w przypadku drugim przebiega analogicznie, ale jest więcej rysowania. Niech $A$ i $B$ będą zbiorami skończonymi. Chcemy policzyć liczbę elementów w ich sumie mnogościowej $A \cup B$, tzn. $|A \cup B|$. Zaczynamy od sumy mocy $|A| + |B|$, ale wtedy elementy wspólne zliczamy podwójnie (zobacz poniższy diagram Venna). Dlatego musimy odjąć moc części wspólnej $|A \cap B|$. Ostatecznie dochodzimy do wzoru $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.




**3.7**. Przez $X$ oznaczmy zbiór wszystkich osób starających się o pracę w firmie komputerowej. Ponadto niech $S$, $D$ oraz $L$ oznaczają zbiory osób, które mają odpowiednio wyższe studia informatyczne, doświadczenie oraz wiek powyżej 40 lat. Wtedy kolejne informacje dotyczące kandydatów możemy zapisać za pomocą liczebności zbiorów następująco: $|X| = 30$, $|S \cap D \cap L| = 2$, $|S \cap D| = 5$, $|S \cap L| = 3$, $|L \cap D| = 6$, $|L| = 10$, $|D| = 15$, $|S| = 12$. (a) 5 (b) 8 (c) 1

**3.8**. Dla dowolnego podzbioru $A$ zbioru $n$-elementowego $X$ rozważmy *szufladkę* $S_A := \{A, X \setminus A\}$. Ponieważ wszystkich podzbiorów zbioru $n$-elementowego jest $2^n$, liczba różnych szufladek wynosi $2^{n-1}$, bo $S_A = S_{X \setminus A}$. Korzystając teraz z zasady szufladkowej Dirichleta (zob. Rozdział 2), stwierdzamy, że istnieje szufladka $S_A$ oraz dwa zbiory $B, C$ wybrane spośród danych na początku $2^{n-1} + 1$ różnych podzbioru zbioru $X$ takie, że $B, C \in S_A$. Zatem $B = A$ oraz $C = X \setminus A$ lub $C = A$ i $B = X \setminus A$. Wtedy $B \cap C = A \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Oznacza to, że $B$ i $C$ są naszymi poszukiwanymi podzbiorami rozłącznymi.

**3.9**. Przypomnijmy, że iloczyn kartezjański $A \times B$ składa się z par $(a, b)$, gdzie pierwszy element pary wzięty jest ze zbioru $A$, a drugi – ze zbioru $B$.

(a) Iloczyn kartezjański $A \times B$ będzie składał się z 6 par:

$$A \times B = \big\{(-1,1),\ (-1,3),\ (0,1),\ (0,3),\ (1,1),\ (1,3)\big\}.$$

(b) Iloczyn kartezjański $A \times B$ będzie składał się z 6 par:

$$A \times B = \big\{(-3,1),\ (-3,2),\ (-3,4),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,4)\big\}.$$

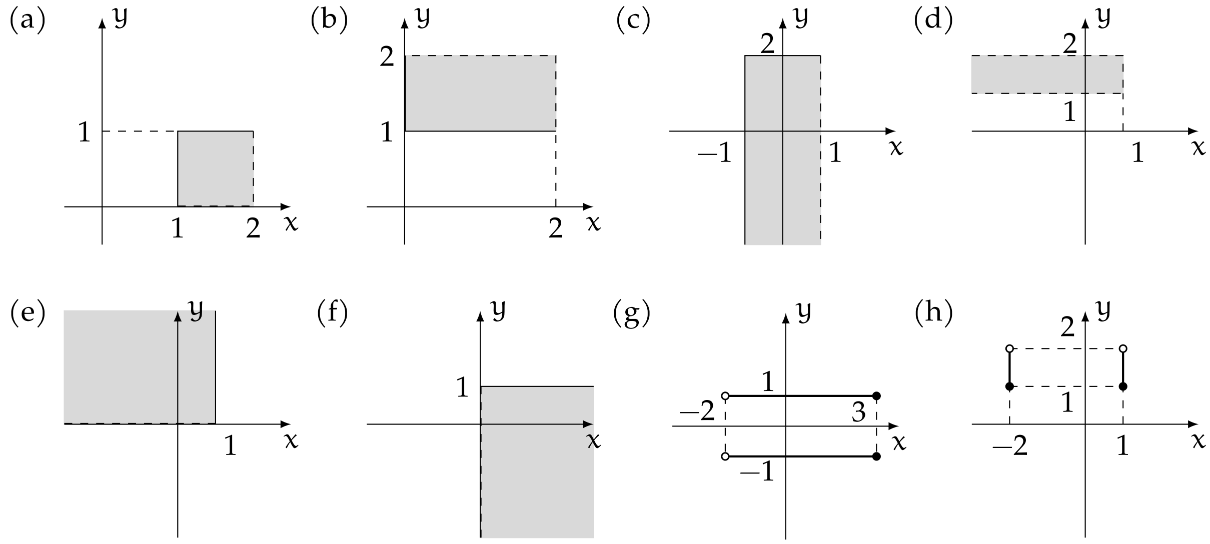
(c) Iloczyn kartezjański $A \times B$ będzie składał się z 4 par:

$$A \times B = \big\{(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (a,d)\big\}.$$

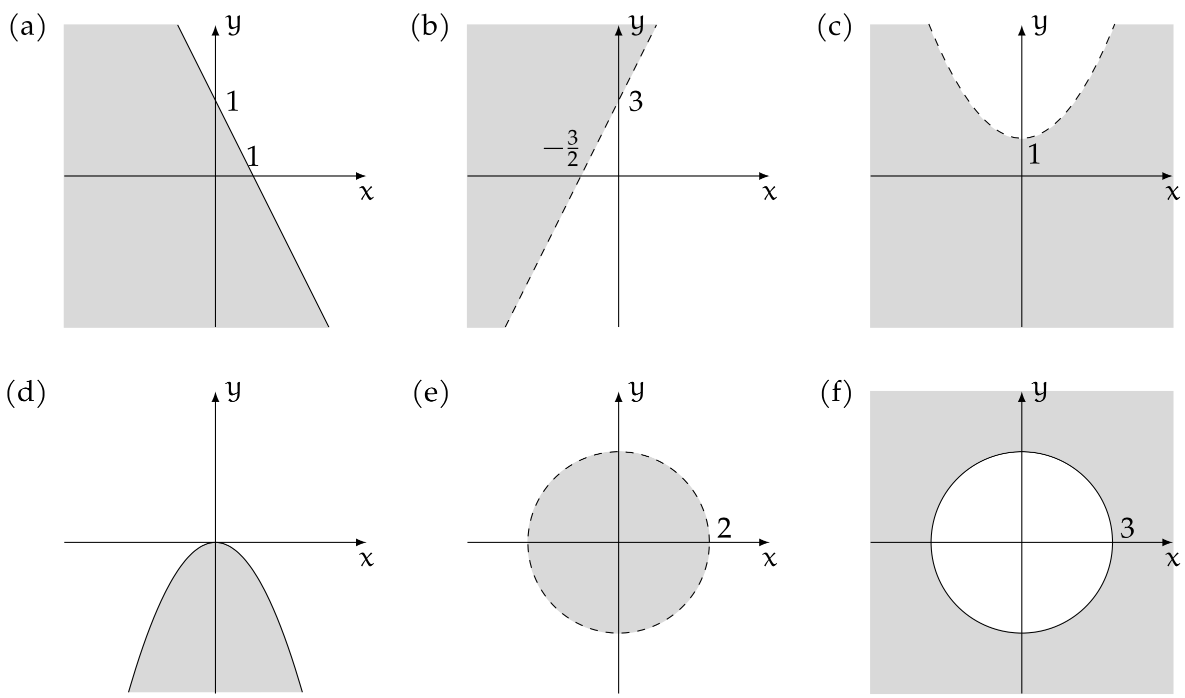
(d) Iloczyn kartezjański $A \times B$ będzie składał się z 4 par:

$$A \times B = \big\{(a,b),\ (b,b),\ (c,b),\ (d,b)\big\}.$$

**3.10**.




**3.10**.




**3.11**. (a) Zauważmy, że $A_i$ jest po prostu przedziałem $[-i, i]$. Zatem $A_1 = [-1, 1]$, $A_2 = [-2, 2]$, $A_3 = [-3, 3]$, itd. Widzimy więc, że $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$. Zatem przekrojem wszystkich będzie przedział $A_1$, tzn.

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_1 = [-1, 1].$$

Wyznaczenie sumy zbiorów $A_i$ będzie równie łatwe. Ponieważ przedziały $[-i, i]$ „rozszerzają się”, każda liczba rzeczywista musi wpaść do któregoś z nich. Np. $\sqrt{2} \in A_2$, bo $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ oraz $-\pi \in A_4$, bo $\pi \approx 3{,}14$. Oznacza to, że

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}.$$

(b) I tutaj mamy do czynienia z przedziałami. Tym razem są to przedziały postaci $A_i = [i, i+1]$. A więc $A_1 = [1, 2]$, $A_2 = [2, 3]$, $A_3 = [3, 4]$, itd. Układając je jeden za drugim, są one jak „cegiełki", z których możemy „skleić" półprostą $[1, +\infty)$. (Zauważmy, że tam, gdzie kończy się jeden, zaczyna się kolejny.) Zatem

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = [1, +\infty).$$

Przekrojem zbiorów $A_i$ jest zbiór pusty, bo nie ma żadnej liczby rzeczywistej, która jednocześnie należałaby do każdego z nich. Jeżeli jakaś liczba należy do zbioru $A_i$, to nie może już należeć do zbioru $A_{i+2}$. Zatem

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \emptyset.$$

(c) Każdy zbiór $A_i$ jest przedziałem $A_i = [0, \frac{1}{1+i}]$. W odróżnieniu od poprzednich przykładów, zbiory $A_i$ są numerowane liczbami nieujemnymi. Napis $A_\pi$ ma więc sens i zbiór ten jest postaci $[0, \frac{1}{1+\pi}]$. Zauważmy jednak, że zbiory $A_i$ tworzą rodzinę malejącą, tzn. jeżeli $0 \leqslant i \leqslant j$, to $A_j \subseteq A_i$. Wynika to z prostej obserwacji, że dla liczb $0 \leqslant i \leqslant j$ mamy $\frac{1}{1+j} \leqslant \frac{1}{1+i}$. A więc największym zbiorem jest $A_0 = [0, 1]$, a wszystkie inne się w nim zawierają. Stąd

$$\bigcup_{i \geqslant 0} A_i = A_0 = [0, 1].$$

Wyznaczenie przekroju zbiorów $A_i$ jest trochę trudniejsze. Szukamy bowiem tych liczb $x$ , które należą do każdego zbioru $A_i$, tzn. spełniają nierówność

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{1+i} \quad \text{dla } \textit{każdego } i \geqslant 0.$$

Nie może być to żadna z liczb dodatnich, bo np. $\frac{1}{2} \notin A_3$, a $\frac{1}{10} \notin A_{11}$. Po chwili zastanowienia stwierdzamy, że jedyną taką liczbą jest 0. Zatem

$$\bigcap_{i \geqslant 0} A_i = \{0\}$$

(d) Przedziały $A_i = [1, 1 + \frac{1}{i}]$ tworzą rodzinę malejącą, tzn. dla $1 \leqslant i \leqslant j$ mamy $A_j \subseteq A_i \subseteq A_1 = [1, 2]$. Zatem

$$\bigcup_{i \geqslant 0} A_i = A_1 = [1, 2].$$

Jeżeli chodzi o przekrój zbiorów $A_i$, to rozumując podobnie jak w przykładzie poprzednim, otrzymujemy

$$\bigcap_{i \geqslant 0} A_i = \{1\}.$$

(e) Zauważmy, że przy ustalonym parametrze $i$ wzór $y = i \cdot x$ jest równaniem prostej. Oznacza to, że każdy zbiór $A_i$ jest prostą na płaszczyźnie o współczynniku kierunkowym $i$, która przechodzi przez początek układu współrzędnych. Co więcej, punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem wspólnym wszystkich prostych. Zatem

$$\bigcap_{i \in \mathbb{R}} A_i = \{(0, 0)\}.$$

Z drugiej strony otrzymujemy

$$\bigcup_{i\in\mathbb{R}} A_i = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y) : y \neq 0\}$$

Naturalnym pytaniem jest dlaczego suma zbiorów $A_i$ nie równa się całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$? Rozważamy bowiem proste w postaci kierunkowej $y = i \cdot x$. Nie można w niej zapisać prostych pionowych; w naszym przypadku prostej $x = 0$ pokrywającej się z osią OY układu współrzędnych. Dlatego też od $\mathbb{R}^2$ musieliśmy wykluczyć właśnie tę prostą, tutaj zapisaną jako zbiór $\{(0,y) : y \neq 0\}$.

(f) I w tym przykładzie mamy do czynienia z prostymi. Zbiór $A_i$ jest wykresem prostej, która przechodzi przez punkty $(-i, 0)$ oraz $(0, i)$. Na przykład zbiór $A_0$, to po prostu wykres prostej $y = x$, a zbiór $A_3$ wykres prostej $y = x + 3$. Wszystkie te proste możemy otrzymać z prostej „bazowej” $y = x$ przesuwając je równolegle w górę lub dół o wartość $i$. (O kierunku przesunięcia decyduje znak parametru $i$.) Oznacza to, że

$$\bigcup_{i\in\mathbb{R}} A_i = \mathbb{R}^2.$$

Z drugiej strony

$$\bigcap_{i\in\mathbb{R}} A_i = \emptyset,$$

bo na przykład wykresu prostych $y = x$ oraz $y = x + 1$ nie mają części wspólnej. (Albo mówiąc inaczej, proste $y = x$ oraz $y = x + 1$ nie przecinają się; są w końcu równoległe.)

(g) Przypomnijmy, że równanie $x^2+y^2 = i^2$ opisuje okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $i$. Zatem zbiór $A_i$ jest zewnętrzem koła o środku w początku układu współrzędnych oraz promieniu $i$ (zob. Zadanie 3.10 f). Albo inaczej, płaszczyzną $\mathbb{R}^2$ z wyciętym wnętrzem (czyli bez brzegu) koła o środku w początku układu współrzędnych oraz promieniu $i$. Zauważmy również, że $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots$. Zatem

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_1 = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \geqslant 1\big\}.$$

Z drugiej strony

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \emptyset,$$

bo z płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ musimy wycinać coraz większe koła. I w końcu wytniemy „wszystko”.

(h) I tym razem mamy do czynienia z kołami. Zbiór $A_i$ jest kołem o środku w układzie współrzędnych oraz promieniu $i$. Oczywiście koła o większych promieniach zawierają te o promieniach mniejszych. Zatem $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots$. Stąd mamy od razu

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = A_1 = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}.$$

Jeżeli chodzi o sumę zbiorów $A_i$, to podobnie jak w podpunkcie (a) w przypadku przedziałów $[-i, i]$ na prostej, także tutaj koła $A_i$ „rozszerzają się” wraz ze wzrostem wskaźnika $i$, aż w końcu „obejmą” całą płaszczyznę. Zatem

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}^2.$$

## Literatura

<u>Bibliografia.</u> Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:


- I. Bondecka-Krzykowska, M. Borkowski, *Warsztat pracy matematyka*, materiały e-learningowe, Poznań, 2015.
- M. Borkowski, *Wstęp do teorii mnogości – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2006.
- W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2005.
- M. Kaluba, *Wstęp do matematyki – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2012.
- W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1999.
- R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2005.
- J. Musielak, *Wstęp do matematyki*, PWN, Warszawa, 1970.
- J. Topp, *Wstęp do matematyki*, Wydawnictwo Uniwersytet Gdański, Gdańsk, 2015.