Metody matematyki

opracowane na podstawie:
I. Bondecka-Krzykowska, M. Borkowski,
Warsztat pracy matematyka, materiały e-learningowe

Metody matematyki:
definicje

Definicja – co to takiego?

Definicja to wypowiedź o określonej budowie, która podaje znaczenie pewnego wyrażenia. Definicja ma na celu podanie równoważnika terminu nieznanego w terminach znanych.

Definicja – co to takiego?

Definicja to wypowiedź o określonej budowie, która podaje znaczenie pewnego wyrażenia. Definicja ma na celu podanie równoważnika terminu nieznanego w terminach znanych.

Definicja składa się z:

- *definiendum* – wyrażenie definiowane (to, co definiujemy),
- *definiens* – wyrażenie definiujące, a więc wyrażenie, przy pomocy którego definicja informuje o znaczeniu wyrażenia definiowanego,
- *łącznik definicyjny* – wyrażenie równoważne dla „jest", „to", „oznacza, że", „jest to".

Definicja – co to takiego?

Rodzaje definicji:

- definicja równościowa – dostarcza kryteriów określających jednoznacznie, czy dany obiekt podpada pod wyraz (zwrot) definiowany, czy nie,

Definicja – co to takiego?

Rodzaje definicji:

- definicja równościowa – dostarcza kryteriów określających jednoznacznie, czy dany obiekt podpada pod wyraz (zwrot) definiowany, czy nie,
- definicja aksjomatyczna – podaje się w niej komplet własności definiowanego pojęcia i przyjmuje umowę, że każdy obiekt spełniający tę listę własności podpada pod definicję, zaś żaden obiekt, który nie spełnia choćby jednej z podanych własności, pod tę definicję nie podpada,

Definicja – co to takiego?

Rodzaje definicji:

- definicja równościowa – dostarcza kryteriów określających jednoznacznie, czy dany obiekt podpada pod wyraz (zwrot) definiowany, czy nie,
- definicja aksjomatyczna – podaje się w niej komplet własności definiowanego pojęcia i przyjmuje umowę, że każdy obiekt spełniający tę listę własności podpada pod definicję, zaś żaden obiekt, który nie spełnia choćby jednej z podanych własności, pod tę definicję nie podpada,
- definicja rekurencyjna – to definicja pojęcia X, odwołująca się do tego samego pojęcia X.

Przykłady

Okrąg to zbiór wszystkich punktów na danej płaszczyźnie oddalonych o daną odległość od danego punktu.

Przykłady

Kwadrat jest to prostokąt równoboczny.

Przykłady

x jest dziadkiem y wtedy i tylko wtedy, gdy x jest ojcem matki y lub x jest ojcem ojca y.

Przykłady

Słoń jest to szare, czworonożne zwierzę mające trąbę i kły.

Przykłady

Słoń jest to szare, czworonożne zwierzę mające trąbę i kły.

Pytanie: Czy moglibyśmy zdefiniować pojęcie *słoń* tak?
Słoń jest to szare, czworonożne zwierzę.

Przykłady

Słoń jest to szare, czworonożne zwierzę mające trąbę i kły.

Pytanie: Czy moglibyśmy zdefiniować pojęcie *słoń* tak?
Słoń jest to szare, czworonożne zwierzę.

Pytanie: A tak?
Słoń jest to szare, czworonożne zwierzę mające trąbę.

Przykłady

Przodek to rodzic bądź przodek rodzica.

Przykłady

Przodek to rodzic bądź przodek rodzica.

Uwaga: A oto ta sama definicja w bardziej formalnej postaci:

Niech x będzie człowiekiem.

1. Rodzice x są jego przodkami.
2. Przodkowie rodziców x są jego przodkami.
3. x nie ma innych przodków oprócz rodziców i ludzi, którzy są jego przodkami na mocy podpunktu 2.

Przykłady

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 0, \\ n \cdot (n-1)!, & \text{gdy } n > 0. \end{cases}$$

Błędy definiowania

- „ignotum per ignotum" – wyjaśnianie nieznanego przez nieznane,
- „idem per idem" – to samo przez to samo,
- błędne koło – definicja przebiega według następującego schematu: wyrażenie P definiujemy przy pomocy wyrażenia Q, które z kolei definiujemy przy pomocy wyrażenia P,
- błąd przesunięcia kategorialnego,
- definicje za wąskie,
- definicje za szerokie.

Przykłady

Sprawiedliwość to tyle, co wszystkie uczynki sprawiedliwe.

Przykłady

Polopiryna jest kwasem acetylosalicylowym.

Przykłady

Adwokat jest to osoba wykonująca zawód prawnika.

Przykłady

Logika jest to nauka o poprawnym rozumowaniu. Poprawne rozumowanie to takie, które przebiega wedle ściśle określonych reguł. Ściśle określone reguły wyznacza logika.

Przykłady

Polityka to działalność polityczna.

Przykłady

Muzyk to osoba grająca w orkiestrze symfonicznej.

Metody matematyki: twierdzenia

Twierdzenie – co to takiego?

Twierdzeniem nazywamy zdanie prawdziwe. Aby jakiekolwiek zdanie w matematyce uznać za twierdzenie, należy przeprowadzić jego dowód, tzn. przedstawić rozumowanie (uzasadnienie) przeprowadzone zgodnie z prawami logiki (regułami dowodowymi) wykorzystujące wprowadzone wcześniej definicje oraz udowodnione fakty (inne twierdzenia).

Twierdzenie – co to takiego?

Twierdzeniem nazywamy zdanie prawdziwe. Aby jakiekolwiek zdanie w matematyce uznać za twierdzenie, należy przeprowadzić jego dowód, tzn. przedstawić rozumowanie (uzasadnienie) przeprowadzone zgodnie z prawami logiki (regułami dowodowymi) wykorzystujące wprowadzone wcześniej definicje oraz udowodnione fakty (inne twierdzenia).

Twierdzenia matematyczne na ogół mają postać implikacji. Jeżeli implikacja $p \rightarrow q$ jest twierdzeniem, to p nazywamy założeniem, natomiast q – tezą twierdzenia.

Przykład

Twierdzenie Pitagorasa

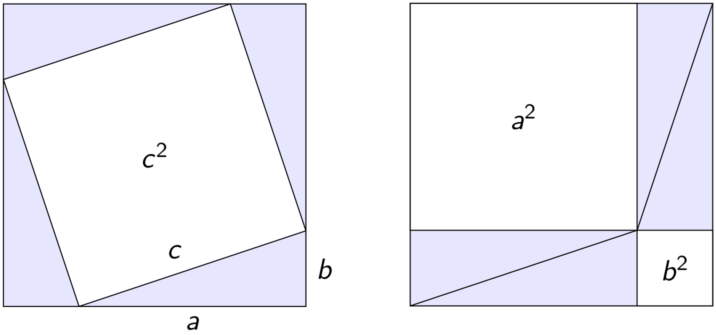
Jeśli trójkąt o bokach długości a, b i c jest prostokątny, przy czym c jest długością przeciwprostokątnej, to $a^2 + b^2 = c^2$.

Przykład

Twierdzenie Pitagorasa

Jeśli trójkąt o bokach długości a, b i c jest prostokątny, przy czym c jest długością przeciwprostokątnej, to $a^2 + b^2 = c^2$.

Dowód:



Przykład

Lemat

Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $a < b + \varepsilon$, to $a \leqslant b$.

Dowód: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a > b$. Połóżmy $\varepsilon = a - b$; oczywiście $\varepsilon > 0$, ale $a = b + \varepsilon$ – sprzeczność z założeniem.

Przykład

Lemat

Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $a < b + \varepsilon$, to $a \leqslant b$.

Dowód: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a > b$. Połóżmy $\varepsilon = a - b$; oczywiście $\varepsilon > 0$, ale $a = b + \varepsilon$ – sprzeczność z założeniem.

- Co oznacza słowo *lemat*?

Przykład

Lemat

Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $a < b + \varepsilon$, to $a \leqslant b$.

Dowód: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a > b$. Połóżmy $\varepsilon = a - b$; oczywiście $\varepsilon > 0$, ale $a = b + \varepsilon$ – sprzeczność z założeniem.

- Co oznacza słowo *lemat*?
- Jaką postać ma schemat zdaniowy powyższego lematu?

Przykład

Lemat

Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $a < b + \varepsilon$, to $a \leqslant b$.

Dowód: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a > b$. Połóżmy $\varepsilon = a - b$; oczywiście $\varepsilon > 0$, ale $a = b + \varepsilon$ – sprzeczność z założeniem.

- Co oznacza słowo *lemat*?
- Jaką postać ma schemat zdaniowy powyższego lematu?
- Co jest założeniem, a co tezą lematu?

Przykład

Lemat

Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $a < b + \varepsilon$, to $a \leqslant b$.

Dowód: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a > b$. Połóżmy $\varepsilon = a - b$; oczywiście $\varepsilon > 0$, ale $a = b + \varepsilon$ – sprzeczność z założeniem.

- Co oznacza słowo *lemat*?
- Jaką postać ma schemat zdaniowy powyższego lematu?
- Co jest założeniem, a co tezą lematu?
- Zmienne a i b nie są poprzedzone żadnym kwantyfikatorem. Jak należy to interpretować?

Przykład

Lemat

Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $a < b + \varepsilon$, to $a \leqslant b$.

Dowód: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a > b$. Połóżmy $\varepsilon = a - b$; oczywiście $\varepsilon > 0$, ale $a = b + \varepsilon$ – sprzeczność z założeniem.

- Co oznacza słowo *lemat*?
- Jaką postać ma schemat zdaniowy powyższego lematu?
- Co jest założeniem, a co tezą lematu?
- Zmienne a i b nie są poprzedzone żadnym kwantyfikatorem. Jak należy to interpretować?
- Co oznacza pierwsze zdanie powyższego dowodu?

Przykład

Lemat

Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $a < b + \varepsilon$, to $a \leqslant b$.

Dowód: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a > b$. Połóżmy $\varepsilon = a - b$; oczywiście $\varepsilon > 0$, ale $a = b + \varepsilon$ – sprzeczność z założeniem.

- Co oznacza słowo *lemat*?
- Jaką postać ma schemat zdaniowy powyższego lematu?
- Co jest założeniem, a co tezą lematu?
- Zmienne a i b nie są poprzedzone żadnym kwantyfikatorem. Jak należy to interpretować?
- Co oznacza pierwsze zdanie powyższego dowodu?
- Co oznacza słowo „połóżmy”?

Przykład

Lemat

Jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ zachodzi nierówność $a < b + \varepsilon$, to $a \leqslant b$.

Dowód: Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $a > b$. Połóżmy $\varepsilon = a - b$; oczywiście $\varepsilon > 0$, ale $a = b + \varepsilon$ – sprzeczność z założeniem.

- Co oznacza słowo *lemat*?
- Jaką postać ma schemat zdaniowy powyższego lematu?
- Co jest założeniem, a co tezą lematu?
- Zmienne a i b nie są poprzedzone żadnym kwantyfikatorem. Jak należy to interpretować?
- Co oznacza pierwsze zdanie powyższego dowodu?
- Co oznacza słowo „połóżmy”?
- Jak autor dowodu mógł wpaść na to, żeby podstawić $a - b$ za ε?

Przykład – dowody niekonstruktywne

Twierdzenie

Istnieją liczby niewymierne a i b takie, że a^b jest liczbą wymierną.

Przykład – dowody niekonstruktywne

Twierdzenie

Istnieją liczby niewymierne a i b takie, że a^b jest liczbą wymierną.

Dowód: $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Mamy dwie możliwości:

Przykład – dowody niekonstruktywne

Twierdzenie

Istnieją liczby niewymierne a i b takie, że a^b jest liczbą wymierną.

Dowód: $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Mamy dwie możliwości:

1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną,
2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nie jest liczbą wymierną.

Przykład – dowody niekonstruktywne

Twierdzenie

Istnieją liczby niewymierne a i b takie, że a^b jest liczbą wymierną.

Dowód: $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Mamy dwie możliwości:

1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną,
2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nie jest liczbą wymierną.

W pierwszym przypadku, liczby $a = b = \sqrt{2}$ spełniają tezę twierdzenia.

Przykład – dowody niekonstruktywne

Twierdzenie

Istnieją liczby niewymierne a i b takie, że a^b jest liczbą wymierną.

Dowód: $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną. Mamy dwie możliwości:

1. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ jest liczbą wymierną,
2. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ nie jest liczbą wymierną.

W pierwszym przypadku, liczby $a = b = \sqrt{2}$ spełniają tezę twierdzenia.
W drugim przypadku, połóżmy $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ oraz $b = \sqrt{2}$. Wtedy liczby a i b są niewymierne oraz

$$a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2,$$

tzn. a^b jest liczbą wymierną.

Przykład – dowody niekonstruktywne 2

Twierdzenie

Jeśli w grupie ćwiczeniowej znajduje się trzynaścioro studentów, to przynajmniej dwoje spośród nich urodziło się w tym samym miesiącu.

Przykład – dowody niekonstruktywne 2

Twierdzenie

Jeśli w grupie ćwiczeniowej znajduje się trzynaścioro studentów, to przynajmniej dwoje spośród nich urodziło się w tym samym miesiącu.

Dowód: Skorzystamy z tzw. zasady szufladkowej Dirichleta, która stwierdza, że jeżeli m przedmiotów włożymy do n różnych szufladek, przy czym $m > n$, to przynajmniej w jednej z szuflad znajdują się przynajmniej dwa przedmioty.

Przykład – dowody niekonstruktywne 2

Twierdzenie

Jeśli w grupie ćwiczeniowej znajduje się trzynaścioro studentów, to przynajmniej dwoje spośród nich urodziło się w tym samym miesiącu.

Dowód: Skorzystamy z tzw. zasady szufladkowej Dirichleta, która stwierdza, że jeżeli m przedmiotów włożymy do n różnych szufladek, przy czym $m > n$, to przynajmniej w jednej z szuflad znajdują się przynajmniej dwa przedmioty.

W naszym przypadku szuflady to miesiące w roku; czyli $n = 12$. Przedmioty to karteczki z imionami i nazwiskami oraz numerami indeksów studentów; stąd $m = 13$.

Przykład – dowody niekonstruktywne 2

Twierdzenie

Jeśli w grupie ćwiczeniowej znajduje się trzynaścioro studentów, to przynajmniej dwoje spośród nich urodziło się w tym samym miesiącu.

Dowód: Skorzystamy z tzw. zasady szufladkowej Dirichleta, która stwierdza, że jeżeli m przedmiotów włożymy do n różnych szufladek, przy czym $m > n$, to przynajmniej w jednej z szuflad znajdują się przynajmniej dwa przedmioty.

W naszym przypadku szuflady to miesiące w roku; czyli $n = 12$. Przedmioty to karteczki z imionami i nazwiskami oraz numerami indeksów studentów; stąd $m = 13$.

Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że co najmniej w jednej szufladzie znajdą się dwie kartki. Nie wiemy, jednak ani w którym miesiącu urodziło się przynajmniej dwóch studentów, ani którzy to są studenci.

Warunek konieczny, warunek dostateczny

Jeżeli twierdzenie ma postać implikacji „Jeżeli p, to q”, to:

- zdanie q nazywa się warunkiem koniecznym dla zdania p,
- zdanie p nazywa się warunkiem wystarczającym dla zdania q.

Warunek konieczny, warunek dostateczny

Jeżeli twierdzenie ma postać implikacji „Jeżeli p, to q”, to:

- zdanie q nazywa się warunkiem koniecznym dla zdania p,
- zdanie p nazywa się warunkiem wystarczającym dla zdania q.

Przykłady:
Jeżeli liczba kończy się na cyfrę 2, to jest parzysta.

Warunek konieczny, warunek dostateczny

Jeżeli twierdzenie ma postać implikacji „Jeżeli p, to q”, to:

- zdanie q nazywa się warunkiem koniecznym dla zdania p,
- zdanie p nazywa się warunkiem wystarczającym dla zdania q.

Przykłady:

Jeżeli liczba kończy się na cyfrę 2, to jest parzysta.

Jeżeli równoległobok ma kąt prosty, to jest prostokątem.

Warunek konieczny, warunek dostateczny

Jeżeli twierdzenie ma postać implikacji „Jeżeli p, to q", to:

- zdanie q nazywa się warunkiem koniecznym dla zdania p,
- zdanie p nazywa się warunkiem wystarczającym dla zdania q.

Przykłady:

Jeżeli liczba kończy się na cyfrę 2, to jest parzysta.

Jeżeli równoległobok ma kąt prosty, to jest prostokątem.

Każdy kwadrat jest prostokątem.

Twierdzenie odwrotne, przeciwne i przeciwstawne

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\begin{array}{c}\text{proste}\\ p \longrightarrow q\end{array} \arrow[dr, leftrightarrow] & \begin{array}{c}\text{odwrotne}\\ q \longrightarrow p\end{array} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\begin{array}{c}\text{przeciwne}\\ \neg p \longrightarrow \neg q\end{array} & \begin{array}{c}\text{przeciwstawne}\\ \neg q \longrightarrow \neg p\end{array}
\end{tikzcd}$$

Twierdzenie odwrotne, przeciwne i przeciwstawne

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\begin{array}{c}\text{proste}\\ p \longrightarrow q\end{array} \arrow[dr, leftrightarrow] & \begin{array}{c}\text{odwrotne}\\ q \longrightarrow p\end{array} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\begin{array}{c}\text{przeciwne}\\ \neg p \longrightarrow \neg q\end{array} & \begin{array}{c}\text{przeciwstawne}\\ \neg q \longrightarrow \neg p\end{array}
\end{tikzcd}$$

Twierdzenie:

proste: Jeżeli ostatnią cyfrą liczby jest 0, to liczba ta jest parzysta.

Twierdzenie odwrotne, przeciwne i przeciwstawne

$$
\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\text{proste}\\ p \longrightarrow q\end{array} \arrow[dr, leftrightarrow] & \begin{array}{c}\text{odwrotne}\\ q \longrightarrow p\end{array} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\begin{array}{c}\text{przeciwne}\\ \neg p \longrightarrow \neg q\end{array} & \begin{array}{c}\text{przeciwstawne}\\ \neg q \longrightarrow \neg p\end{array}
\end{tikzcd}
$$

Twierdzenie:

proste: Jeżeli ostatnią cyfrą liczby jest 0, to liczba ta jest parzysta.

odwrotne: Jeżeli liczba jest parzysta, to jej ostatnia cyfra jest zerem.

Twierdzenie odwrotne, przeciwne i przeciwstawne

$$
\begin{tikzcd}
\text{proste} & \text{odwrotne} \\
p \longrightarrow q \arrow[dr, leftrightarrow] & q \longrightarrow p \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\text{przeciwne} & \text{przeciwstawne} \\
\neg p \longrightarrow \neg q & \neg q \longrightarrow \neg p
\end{tikzcd}
$$

Twierdzenie:

proste: Jeżeli ostatnią cyfrą liczby jest 0, to liczba ta jest parzysta.

odwrotne: Jeżeli liczba jest parzysta, to jej ostatnia cyfra jest zerem.

przeciwne: Jeżeli ostatnia cyfra liczby jest różna od zera, to liczba ta jest nieparzysta.

Twierdzenie odwrotne, przeciwne i przeciwstawne

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\overset{\text{proste}}{p \longrightarrow q} \arrow[dr, leftrightarrow] & \overset{\text{odwrotne}}{q \longrightarrow p} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
\overset{\text{przeciwne}}{\neg p \longrightarrow \neg q} & \overset{\text{przeciwstawne}}{\neg q \longrightarrow \neg p}
\end{tikzcd}$$

Twierdzenie:

proste: Jeżeli ostatnią cyfrą liczby jest 0, to liczba ta jest parzysta.

odwrotne: Jeżeli liczba jest parzysta, to jej ostatnia cyfra jest zerem.

przeciwne: Jeżeli ostatnia cyfra liczby jest różna od zera, to liczba ta jest nieparzysta.

przeciwstawne: Jeżeli liczba jest nieparzysta, to jej ostatnia cyfra jest różna od zera.

Bibliografia

Bibliografia

- W. Marciszewski (red.), *Mała encyklopedia logiki*, Zakład Narodowy Imienia Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław–Warszawa–Kraków, Gdańsk–Łódź, 1988.
- R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2005.