Rozdział 1

Podstawowe operacje logiczne

Teoria

Zdanie w sensie logicznym to zdanie oznajmujące, któremu można przypisać atrybut prawdziwości lub fałszywości. *Zdania proste* (tj. takie, które zawierają dokładnie jedno orzeczenie) będziemy oznaczać symbolami $p, q, r, \ldots$; *prawdę* będziemy oznaczać 1, a *fałsz* 0.

Spójniki logiczne. Do najważniejszych spójników logicznych należą:

- *negacja* $\neg$ (zdanie $\neg p$ czytamy „nieprawda, że p"),
- *koniunkcja* $\wedge$ (zdanie $p \wedge q$ czytamy „p i q"),
- *alternatywa* $\vee$ (zdanie $p \vee q$ czytamy „p lub q"),
- *implikacja* $\rightarrow$ (zdanie $p \rightarrow q$ czytamy „jeżeli p, to q"),
- *równoważność* $\leftrightarrow$ (zdanie $p \leftrightarrow q$ czytamy „p wtedy i tylko wtedy, gdy q).

W przypadku koniunkcji zdania p i q nazywamy *czynnikami*, a w przypadku alternatywy – *składnikami*. W przypadku implikacji $p \rightarrow q$, zdanie p nazywamy *poprzednikiem*, a zdanie q *następnikiem*.

Wartości logiczne. Sens spójników logicznych określa następująca tabelka:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0		0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0		0	0	1	1

Formułą języka rachunku zdań nazwiemy wszystkie zmienne zdaniowe $p, q, r, \ldots$, a także wszystkie „sensowne" (czyli zgodne z zasadami składni) wyrażenia, które możemy zapisać za pomocą zmiennych zdaniowych, spójników logicznych oraz nawiasów. Na przykład wyrażenie $(p \rightarrow q) \vee r$ jest formułą języka rachunku zdań, natomiast $p \rightarrow\rightarrow q$ nie jest, gdyż implikacja musi łączyć dwa zdania.

Tautologią rachunku zdań jest formuła języka rachunku zdań, która przy każdym przypisaniu wartości prawda/fałsz zmiennym zdaniowym jest zdaniem prawdziwym.

Wnioskowania niezawodne. *Schematem wnioskowania* nazywamy wyrażenie

$$\frac{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n}{\varphi}$$

składające się z formuł $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ zwanych *przesłankami* oraz formuły φ zwanej *wnioskiem*. Schemat wnioskowania nazywamy *niezawodnym*, gdy formuła $(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to \varphi$ jest tautologią.

Kwantyfikatory:

- *kwantyfikator mały* (*szczegółowy*) $\exists$ (wyrażenie $\exists x$ czytamy „istnieje takie x, że …”),
- *kwantyfikator duży* (*ogólny*) $\forall$ (wyrażenie $\forall x$ czytamy „dla każdego x …”).

Kwantyfikatory o ograniczonym zakresie. W zapisach $\exists x$ i $\forall x$ zmienna x przebiega wszystkie możliwe obiekty. Czasami (np. dla wygody, czy uproszczenia zapisu) bierze się pod uwagę jedynie obiekty z ustalonego wcześniej zbioru (np. zbioru liczb naturalnych czy rzeczywistych). Stosuje się wtedy tzw. *kwantyfikatory o ograniczonym zakresie* i zamiast $\forall x\ \ [\varphi(x) \to \psi(x)]$ piszemy $\forall \varphi(x)\ \ \ \psi(x)$, a zamiast $\exists x\ \ [\varphi(x) \wedge \psi(x)]$ piszemy $\exists \varphi(x)\ \ \ \psi(x)$; tutaj φ i ψ są pewnymi warunkami. Zauważmy, że w przypadku kwantyfikatorów o nieograniczonym zakresie (czyli „zwykłych” kwantyfikatorów) pod kwantyfikatorem stoi zmienna $x, y, \ldots$. W przypadku kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie pod kwantyfikatorem stoi $\varphi(x)$.

Formułą języka rachunku predykatów będziemy nazywać wszystkie „sensowne” (czyli zgodne z zasadami składni) wyrażenia zbudowanie z:

- *stałych* $a, b, c, \ldots$ oznaczających konkretne (niekonieczne fizyczne) obiekty (np. Jan Nowak, liczba wymierna, π, rozkład normalny, …),
- *zmiennych* $x, y, z, \ldots$,
- *symboli funkcyjnych* $F, G, H, \ldots$ dzięki, którym ze stałych i zmiennych prostszych można budować zmienne i stałe bardziej skomplikowane (np. $F(x, y) = x + y$ lub $G(r) =$ „*koło o promieniu* r”, gdzie r jest konkretną liczbą),
- *predykatów* $P, Q, R, \ldots$, czyli wyrażeń, które w połączeniu ze stałymi tworzą zdania (np. predykat $P =$ „… *jest liczbą niewymierną*” w połączeniu ze stałą π tworzy zdanie $P(\pi) =$ „π *jest liczbą niewymierną*”); predykaty mogą łączyć się również ze zmiennymi (np. predykat $Q =$ „… leży pomiędzy … oraz …” w połączeniu ze zmiennymi x, y, z daje wyrażenie $Q(x, y, z) =$ „x *leży pomiędzy* y *oraz* z”),
- kwantyfikatorów,
- spójników logicznych,
- symboli pomocniczych takich, jak nawiasy, znaki przestankowe, itp.

Zasięg kwantyfikatora. Wyrażenie φ w formule $\exists x\ \varphi$ i w $\forall x\ \varphi$ nazywamy *zasięgiem* odpowiedniego kwantyfikatora.

Zmienne wolne i związane. Zmienna x występująca w danym miejscu w formule zdaniowej jest *w tym miejscu związana*, jeżeli występuje

- bezpośrednio po kwantyfikatorze (np. $\exists x$ lub $\forall x$) lub
- w zasięgu kwantyfikatora, po którym napisana jest zmienna x (np. $\exists x \; [P(x) \to Q(x)]$).

Zmienna występująca w formule jest *związana w tej formule*, gdy jest związana na każdym miejscu, na którym występuje. Zmienną, która nie jest związana w formule, nazywamy *zmienną wolną*.

Zdaniem języka rachunku predykatów nazywamy formułę zdaniową tego języka nie zawierającą zmiennych wolnych.

Jak negować formuły? Należy stosować się do poniższych praw:

- $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$,
- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,
- $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$,
- $\neg(\exists x \; \psi(x)) \leftrightarrow \forall x \; (\neg \psi(x))$,
- $\neg(\forall x \; \psi(x)) \leftrightarrow \exists x \; (\neg \psi(x))$.

W przypadku negowania kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie *nie* negujemy warunku pod kwantyfikatorem, tzn.

- $\neg(\exists \varphi(x) \; \psi(x)) \leftrightarrow \forall \varphi(x) \; (\neg \psi(x))$,
- $\neg(\forall \varphi(x) \; \psi(x)) \leftrightarrow \exists \varphi(x) \; (\neg \psi(x))$.

Zadania

Zadanie 1.1. Zapisz schematy następujących wypowiedzi, uwzględniając możliwe różne interpretacje, jeżeli wypowiedź nie jest jednoznaczna.

(a) Jest poniedziałek i pięknie świeci słońce.

(b) Ubiegłej nocy niebo było zachmurzone lub gwiazdy jasno świeciły.

(c) Jeżeli Ania i Basia są bliźniaczkami, to chodzą do jednej klasy i mają wspólne koleżanki.

(d) Jeżeli Daniel jest studentem, to czyta książki i skrypty i rozwiązuje dużo zadań.

(e) Zbyszek był w sierpniu w Paryżu, zwiedził Luwr i widział wieżę Eiffla.

(f) Antek ukończył studia filologiczne i został tłumaczem lub podjął pracę nauczyciela.

(g) Jeżeli uważałeś na wykładach lub przeczytałeś podręcznik, to posiadłeś wiedzę.

(h) Jeżeli fizycy mają rację, to nieprawdą jest, że wszechświat jest skończony.

(i) Ela ma uprawnienia do wykonywania zawodu nauczyciela, pod warunkiem że ma przynajmniej licencjat i zdała niezbędne egzaminy z przedmiotów pedagogicznych.

(j) Franek był wczoraj w kinie, o ile tylko nie zapomniał kupić wcześniej biletów i nad miastem nie przeszła ulewa.

(k) Jeżeli Hania spotkała wczoraj Wojtka, to o ile nie było za późno, na pewno wyskoczyli na kawę.

(l) Jana w zeszłym roku zwolnili z pracy i jeśli do dziś nie znalazł nowej, to jego rodzina żyje w niedostatku.

Zadanie 1.2. Wyznacz wartość logiczną poniższych formuł:

(a) $0 \wedge 1$,

(b) $0 \vee 1$,

(c) $(1 \leftrightarrow 1) \to 0$,

(d) $(1 \to 0) \to 1$,

(e) $0 \to (\neg 0 \wedge 1)$,

(f) $(0 \vee \neg 1) \leftrightarrow 0$,

(g) $\neg(1 \to 0) \wedge (\neg 1 \vee 0)$,

(h) $(\neg 0 \vee 1) \leftrightarrow (1 \to 0)$.

Zadanie 1.3. Sprawdź metodą zero-jedynkową, czy tautologiami są następujące formuły:

(a) $p \vee \neg p$,

(b) $\neg p \to p$,

(c) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$,

(d) $(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$,

(e) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$,

(f) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$,

(g) $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$,

(h) $[(\neg p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$.

Zadanie 1.4. Zbadaj, czy następujące wnioskowania przebiegają według schematów niezawodnych:

(a) Jeśli pada deszcz, to ulica jest mokra.
Pada deszcz.
____
Ulica jest mokra.

(b) Jeśli pada deszcz, to ulica jest mokra.
Nie pada deszcz.
____
Ulica nie jest mokra.

(c) Jeśli pada deszcz, to ulica jest mokra.
Ulica jest mokra.
____
Pada deszcz.

(d) Jeśli pada deszcz, to ulica jest mokra.
Ulica nie jest mokra.
____
Nie pada deszcz.

Zadanie 1.5. Zapisz poniższe zdania języka predykatów za pomocą języka naturalnego:

(a) $\exists n \in \mathbb{N} \quad n + 2 = 5$,

(b) $\forall k \in \mathbb{Z} \quad 2k + 3 = 0$,

(c) $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \quad x < y$,

(d) $\exists x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \quad x \geqslant y$,

(e) $\forall k \in \mathbb{Z} \ \forall l \in \mathbb{Z} \quad [n = k \cdot l \to (k = 1 \vee l = 1)]$, gdzie $n > 1$ jest ustaloną liczbą naturalną,

(f) $\exists n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \ (k \geqslant n \to a_k = a_n)$, gdzie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ustalonym ciągiem,

(g) $\forall x \in X\ \forall y \in X\ \ [(P(x) \wedge P(y)) \to x = y]$, gdzie predykat P oznacza „*... ma własność* P”,

(h) $\exists x \in X\ \exists y \in X\ \ [P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y]$, gdzie predykat P oznacza „*... ma własność* P”,

Zadanie 1.6. Wprowadzając odpowiednie predykaty i zmienne zbuduj schematy podanych niżej zdań. (Pamiętaj, że możesz używać kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie!)

(a) Wszyscy są logikami.

(b) Ktoś jest logikiem.

(c) Nie wszyscy są logikami.

(d) Wszyscy logicy to matematycy.

(e) Nie wszyscy logicy są matematykami.

(f) Niektórzy logicy nie są matematykami.

(g) Tylko logicy są matematykami.

(h) Nie tylko matematycy są logikami.

(i) Każdy matematyk potrafi rozwiązać jakiś problem.

(j) Żaden matematyk nie potrafi rozwiązać wszystkich problemów.

(k) Pewnego problemu nie potrafi rozwiązać żaden matematyk.

(l) Jeden z problemów potrafią rozwiązać wszyscy matematycy.

Zadanie 1.7. W podanych wyrażeniach wskaż zasięg kwantyfikatorów oraz zmienne wolne i związane:

(a) $\big[\forall x\ R(x)\big] \to \big\{\forall y\ \exists z\ [P(z) \wedge S(x,y)] \vee \exists x\ Q(x)\big\}$,

(b) $\forall x\ \big\{R(x) \to \exists y\ [P(y) \vee \forall z \forall v\ S(y,z)]\big\}$,

(c) $\forall x\ \exists y\ \ [(P(x,y) \wedge Q(z)) \to \forall z\ \ R(z)]$,

(d) $\exists y\ \ [P(y) \leftrightarrow (Q(x) \vee \forall z\ R(z,y))]$,

(e) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \ [R(x,y,w) \to S(x,y,z)]$,

(f) $\big[\forall x\ \forall y\ \forall u\ \forall w\ \ R(x,y,w)\big] \to S(x,y,z)$.

Zadanie 1.8. Zaneguj następujące formuły:

(a) $\exists x\ \neg P(x)$,

(b) $\forall x\ P(x)$,

(c) $\forall x\ [P(x) \vee Q(x)]$,

(d) $\exists x\ [P(x) \wedge Q(x)]$,

(e) $\forall x\ \forall y\ [\neg P(x) \to Q(y)]$,

(f) $\exists x\ \exists y\ [P(y) \to \neg Q(x)]$,

(g) $\exists x\ \forall y\ [(P(y) \vee Q(x)) \to \neg R(y)]$,

(h) $\forall x\ \exists y\ [(P(x) \wedge Q(y)) \to R(y)]$,

(i) $\exists x\ \{P(x) \vee \forall y\ [\neg Q(x) \wedge \neg R(y)]\}$,

(j) $\forall x\ \{[P(x,y) \vee Q(x,y)] \wedge \exists y\ R(y)\}$.

Zadanie 1.9. Zaneguj następujące formuły z kwantyfikatorami o ograniczonym zakresie:

(a) $\exists m \in \mathbb{R}\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall k \geqslant n \quad m \leqslant a_k$,

(b) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall k \geqslant n \quad |a_k - g| \geqslant \varepsilon$,

(c) $\forall k \in \mathbb{Z}\ \ \exists l \in \mathbb{Z} \quad k = 3l\ \vee\ k = 3l+1\ \vee\ k = 3l+2$,

(d) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y\ \vee\ x = y\ \vee\ x \geqslant y$,

(e) $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall s \in [0,1] \quad |t-s| \leqslant \delta\ \to\ |f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon$,

(f) $\exists L \geqslant 0\ \ \exists t \in [0,1]\ \ \forall s \in [0,1] \quad s \leqslant t\ \to\ |f(s) - f(0)| \leqslant L|s|$.

Rozwiązania

1.1. (a) $p \wedge q$, gdzie p jest zdaniem „Jest poniedziałek”, a q jest zdaniem „Pięknie świeci słońce”.

(b) $p \vee q$, gdzie p jest zdaniem „Ubiegłej nocy niebo było zachmurzone”, a q jest zdaniem „Gwiazdy jasno świeciły”.

(c) $p \to (q \wedge r)$, gdzie p jest zdaniem „Ania i Basia są bliźniaczkami”, q jest zdaniem „[One] chodzą do jednej klasy”, a r jest zdaniem „[One] mają wspólne koleżanki”.

(d) $p \to (q \wedge r)$, gdzie p jest zdaniem „Daniel jest studentem”, q jest zdaniem „[On] czyta książki i skrypty”, a r jest zdaniem „[On] rozwiązuje dużo zadań”.

(e) $p \wedge q \wedge r$, gdzie p jest zdaniem „Zbyszek był w sierpniu w Paryżu”, q jest zdaniem „[On] zwiedził Luwr”, a r jest zdaniem „[On] widział wieżę Eiffla”.

(f) $p \wedge (q \vee r)$, gdzie p jest zdaniem „Antek ukończył studia filologiczne”, q jest zdaniem „[On] został tłumaczem”, a r jest zdaniem „[On] podjął pracę nauczyciela”; dopuszczalna jest również odpowiedź $(p \wedge q) \vee r$, choć jest ona „gorsza” od poprzedniej, gdyż zazwyczaj by zostać tłumaczem lub nauczycielem, należy najpierw ukończyć studia filologiczne.

(g) $(p \vee r) \to q$, gdzie p jest zdaniem „[Ty] uważałeś na wykładach”, q jest zdaniem „[Ty] przeczytałeś podręcznik”, a r jest zdaniem „[Ty] posiadłeś wiedzę”.

(h) $p \to \neg q$, gdzie p jest zdaniem „Fizycy mają rację”, a q jest zdaniem „Wszechświat jest skończony”.

(i) $(p \wedge q) \to r$, gdzie p jest zdaniem „[Ela] ma przynajmniej licencjat”, q jest zdaniem „[Ela] zdała niezbędne egzaminy z przedmiotów pedagogicznych”, a r jest zdaniem „Ela ma uprawnienia do wykonywania zawodu nauczyciela”.

(j) $(\neg p \wedge \neg q) \to r$, gdzie p jest zdaniem „[Franek] zapomniał kupić wcześniej biletów”, q jest zdaniem „Nad miastem przeszła ulewa”, a r jest zdaniem „Franek był wczoraj w kinie”.

(k) $p \to (\neg q \to r)$, gdzie p jest zdaniem „Hania spotkała wczoraj Wojtka”, r jest zdaniem „Było za późno”, a q jest zdaniem „[Oni] na pewno wyskoczyli na kawę”.

(l) $p \wedge (\neg q \to r)$, gdzie p jest zdaniem „Jana w zeszłym roku zwolnili z pracy”, q jest zdaniem „[Jan] znalazł nową [pracę]”, a r jest zdaniem „Jego rodzina żyje w niedostatku”.

1.2. (a) 0 (b) 1 (c) 0 (d) 1 (e) 1 (f) 1 (g) 0 (h) 0

1.3. (a) Formuła jest tautologią.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

(b) Formuła nie jest tautologią.

p	$\neg p$	$\neg p \to p$
1	0	1
0	1	0

(c) Formuła nie jest tautologią.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p \to \neg q$	$(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

(d) Formuła jest tautologią.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to q$	$\neg q \to p$	$(\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1

(e) Formuła nie jest tautologią.

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge q)$
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	0

(f) Formuła jest tautologią.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

(g) Formuła jest tautologią.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

(h) Formuła nie jest tautologią.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \to q$	$(\neg p \to q) \wedge \neg p$	$[(\neg p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1

1.4. Niech p oznacza zdanie „Pada deszcz", a q zdanie „Ulica jest mokra".

(a) Wnioskowanie przebiega według schematu niezawodnego, gdyż formuła $[(p \to q) \wedge p] \to q$ jest tautologią, co można łatwo sprawdzić metodą zero-jedynkową.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p] \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(b) Rozumowanie nie przebiega według schematu niezawodnego, gdyż formuła $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$ nie jest tautologią; dla $p = 0$ i $q = 1$ przyjmuje wartość fałsz.

(c) Rozumowanie nie przebiega według schematu niezawodnego, gdyż formuła $[(p \to q) \wedge q] \to p$ nie jest tautologią; dla $p = 0$ i $q = 1$ przyjmuje wartość fałsz.

(d) Wnioskowanie przebiega według schematu niezawodnego, gdyż formuła $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$ jest tautologią, co można łatwo sprawdzić metodą zero-jedynkową.

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1

1.5. W niektórych przykładach może być więcej niż jedna dobra odpowiedź – są one podane jako kolejne zdania.

(a) Istnieje liczba naturalna n będąca rozwiązaniem równania $n + 2 = 5$.

(b) Każda liczba całkowita k spełnia równanie $2k + 3 = 0$.

(c) Dla każdej liczby rzeczywistej x istnieje liczba rzeczywista y taka, że $x < y$. Dla każdej liczby rzeczywistej istnieje liczba większa od niej. Nie istnieje największa liczba rzeczywista.

(d) Istnieje liczba rzeczywista x taka, że dla każdej liczby rzeczywistej y zachodzi nierówność $x \geqslant y$. Istnieje największa liczba rzeczywista.

(e) Dla dowolnych liczb całkowitych k, l, jeżeli n można przedstawić w postaci iloczynu liczb k i l, to $k = 1$ lub $l = 1$. Liczba naturalna n jest liczbą pierwszą.

(f) Istnieje taka liczba naturalna n, że dla każdej liczby neutralnej k jeżeli $k \geqslant n$, to $a_k = a_n$. Ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest od pewnego miejsca stały.

(g) Dla dowolnych elementów x, y ze zbioru X jeżeli x ma własność P i y ma własność P, to x jest równy y. Co najwyżej jeden element ze zbioru X ma własność P.

(h) Istnieją elementy x, y w zbiorze P, które mają własność P i są różne. W zbiorze X istnieją co najmniej dwa elementy o własności P.

1.6. Wprowadźmy następujące predykaty:

$L(x)$ – x jest logikiem,	$M(x)$ – x jest matematykiem,
$P(x)$ – x jest problemem,	$R(x, y)$ – x potrafi rozwiązać y.

(a) $\forall x\ L(x)$

(b) $\exists x\ L(x)$

(c) $\neg\forall x\ L(x)$ lub $\exists x\ \neg L(x)$

(d) $\forall x\ (L(x) \to M(x))$

(e) $\neg\forall x\ (L(x) \to M(x))$ lub $\exists x\ (L(x) \wedge \neg M(x))$

(f) $\exists x\ (L(x) \wedge \neg M(x))$

(g) $\forall x\ (M(x) \to L(x))$

(h) $\neg\forall x\ (L(x) \to M(x))$ lub $\exists x\ (L(x) \wedge \neg M(x))$

W podpunktach (i)–(l) będziemy korzystać z kwantyfikatorów o ograniczonym zakresie.

(i) $\forall M(x)\ \exists P(y)\ R(x, y)$

(j) $\neg\exists M(x)\ \forall P(y)\ R(x, y)$ lub $\forall M(x)\ \exists P(y)\ \neg R(x, y)$

(k) $\exists P(y)\ \forall M(x)\ \neg R(x, y)$

(l) $\exists P(y)\ \forall M(x)\ R(x, y)$

1.7. (a) zmienne związane w formule: y, z
zmienne wolne w formule: x

(b) zmienne związane w formule: x, y, v, z
zmienne wolne w formule: brak

(c) zmienne związane w formule: x, y
zmienne wolne w formule: z

(d) zmienne związane w formule: y, z
zmienne wolne w formule: x

(e) zmienne związane w formule: x, y, z
zmienne wolne w formule: w

(f) zmienne związane w formule: u, w
zmienne wolne w formule: x, y, z

1.8. (a) $\forall x\ P(x)$

(b) $\exists x\, \neg P(x)$

(c) $$\begin{aligned}\neg\forall x[P(x) \vee Q(x)] &\leftrightarrow \exists x \neg[P(x) \vee Q(x)]\\ &\leftrightarrow \exists x[\neg P(x) \wedge \neg Q(x)]\end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned}\neg\exists x\ [P(x) \wedge Q(x)] &\leftrightarrow \forall x\ \neg[P(x) \wedge Q(x)]\\ &\leftrightarrow \forall x\ [\neg P(x) \vee \neg Q(x)]\end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned}\neg\forall x\ \forall y\ [\neg P(x) \to Q(y)] &\leftrightarrow \exists x\ \exists y\ \neg[\neg P(x) \to Q(y)]\\ &\leftrightarrow \exists x\ \exists y\ [\neg(\neg P(x)) \wedge \neg Q(y)]\\ &\leftrightarrow \exists x\ \exists y\ [P(x) \wedge \neg Q(y)]\end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned}\neg\exists x\ \exists y\ [P(y) \to \neg Q(x)] &\leftrightarrow \forall x\ \forall y\ \neg[P(y) \to \neg Q(x)]\\ &\leftrightarrow \forall x\ \forall y\ [P(y) \wedge Q(x)]\end{aligned}$$

(g) $$\begin{aligned}\neg\exists x\ \forall y\ [(P(y) \vee Q(x)) \to \neg R(y)] &\leftrightarrow \forall x\ \exists y\ \neg[(P(y) \vee Q(x)) \to \neg R(y)]\\ &\leftrightarrow \forall x\ \exists y\ [(P(y) \vee Q(x)) \wedge R(y)]\end{aligned}$$

(h) $$\begin{aligned}\neg\forall x\ \exists y\ [(P(x) \wedge Q(y)) \to R(y)] &\leftrightarrow \exists x\ \forall y\ \neg[(P(x) \wedge Q(y)) \to R(y)]\\ &\leftrightarrow \exists x\ \forall y\ [P(x) \wedge Q(y) \wedge \neg R(y)]\end{aligned}$$

(i) $$\begin{aligned}\neg\exists x\ \big\{P(x) \vee \forall y\ [\neg Q(x) \wedge \neg R(y)]\big\} &\leftrightarrow \forall x\ \neg\big\{P(x) \vee \forall y\ [\neg Q(x) \wedge \neg R(y)]\big\}\\ &\leftrightarrow \forall x\ [\neg P(x) \wedge \exists y\ (\neg(\neg Q(x) \wedge \neg R(y)))]\\ &\leftrightarrow \forall x\ [\neg P(x) \wedge \exists y\ (Q(x) \vee R(y))]\end{aligned}$$

(j) $$\begin{aligned}\neg\forall x\ \big\{[P(x,y) \vee Q(x,y)] \wedge \exists y\ R(y)\big\} &\leftrightarrow \exists x\ \neg\big\{[P(x,y) \vee Q(x,y)] \wedge \exists y\ R(y)\big\}\\ &\leftrightarrow \exists x\ \big\{\neg[P(x,y) \vee Q(x,y)] \vee \neg\exists y\ R(y)\big\}\\ &\leftrightarrow \exists x\ \big\{[\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)] \vee \forall y\ \neg R(y)\big\}\end{aligned}$$

1.9. (a) $$\begin{aligned}\neg\exists m \in \mathbb{R}\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall k \geqslant n \quad m \leqslant a_k &\leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\, \neg\forall k \geqslant n \quad m \leqslant a_k\\ &\leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \geqslant n \quad m > a_k\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\neg\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}\ \ \forall k \geqslant n \quad |a_k - g| \geqslant \varepsilon &\leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \exists k \geqslant n \quad \neg\big(|a_k - g| \geqslant \varepsilon\big)\\ &\leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \ \forall n \in \mathbb{N}\, \exists k \geqslant n \quad |a_k - g| < \varepsilon\end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned}&\neg\forall k \in \mathbb{Z}\ \ \exists l \in \mathbb{Z} \quad k = 3l\ \vee\ k = 3l+1\ \vee\ k = 3l+2\\ &\qquad \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ \ \forall l \in \mathbb{Z} \quad \neg(k = 3l\ \vee\ k = 3l+1\ \vee\ k = 3l+2)\\ &\qquad \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ \ \forall l \in \mathbb{Z} \quad k \neq 3l\ \wedge\ k \neq 3l+1\ \wedge\ k \neq 3l+2\end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned}&\neg\forall x \in \mathbb{R}\ \ \forall y \in \mathbb{R} \quad x \leqslant y\ \vee\ x = y\ \vee\ x \geqslant y\\ &\qquad \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ \ \exists y \in \mathbb{R} \quad \neg(x \leqslant y\ \vee\ x = y\ \vee\ x \geqslant y)\\ &\qquad \leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\ \ \exists y \in \mathbb{R} \quad x > y\ \wedge\ x \neq y\ \wedge\ x < y\end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned}&\neg\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \ \forall s \in [0,1] \quad |t-s| \leqslant \delta\ \to\ |f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon\\ &\qquad \leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists s \in [0,1] \quad \neg\big(|t-s| \leqslant \delta \to |f(t) - f(s)| \leqslant \varepsilon\big)\\ &\qquad \leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists s \in [0,1] \quad |t-s| \leqslant \delta\ \wedge\ |f(t) - f(s)| > \varepsilon\end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned}&\neg\exists L \geqslant 0\ \ \exists t \in [0,1]\ \ \forall s \in [0,1] \quad s \leqslant t\ \to\ |f(s) - f(0)| \leqslant L|s|\\ &\qquad \leftrightarrow \forall L \geqslant 0\ \ \forall t \in [0,1]\ \ \exists s \in [0,1] \quad \neg\big(s \leqslant t\ \to\ |f(s) - f(0)| \leqslant L|s|\big)\\ &\qquad \leftrightarrow \forall L \geqslant 0\ \ \forall t \in [0,1]\ \ \exists s \in [0,1] \quad s \leqslant t\ \wedge\ |f(s) - f(0)| > L|s|\end{aligned}$$

Literatura

<u>Bibliografia.</u> Niniejszy zestaw zadań został przygotowany w oparciu o następujące materiały:

- S. Antoniuk, *Podstawowe operacje logiczne, zbiory i operacje na zbiorach - materiały do zajęć ze Wstępu do matematyki*, http://antoniuk.home.amu.edu.pl/WDM/Logika.pdf
- M. Borkowski, *Wstęp do teorii mnogości – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2006.
- M. Borkowski, P. Rzonsowski, konsultacje: I. Bondecka-Krzykowska, *Metoda zerojedynkowa*, http://rzonsol.pl/materialyelearning/elerning-rep/metoda01/index.html
- W. Guzicki, P. Zakrzewski, *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2005.
- M. Kaluba, *Wstęp do matematyki – materiały do ćwiczeń*, Poznań, 2012.
- K. Kuratowski, *Wstep do teorii mnogości i topologii*, wydanie 9, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2004.
- W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, 1999.
- R. Murawski, K. Świrydowicz, *Wstęp do teorii mnogości*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań, 2005.
- J. Musielak, *Wstęp do matematyki*, PWN, Warszawa, 1970.